Équations différentielles

Série 7 (solutionnaire partiel)

Exercice 1. Pour chaque système d'EDO suivant, indiquer s'il est linéaire homogène, linéaire inhomogène, linéaire à coefficients constants ou non linéaire. S'il est linéaire, l'écrire sous forme matricielle. Indiquer également quelle est la variable indépendante et quelles sont les variables dépendantes. Ne pas résoudre.

a) $\begin{cases} x' = x + t^2 \\ y' = x + y + z \\ z' = 2x - 3y + tz + \log t \end{cases}$
b) $\begin{cases} u' = uv \\ v' = u - v \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = tx + y \\ y' = x + ty \\ t' = 1 \end{cases}$
d) $\begin{cases} x_1' = y + x_2 + x_3 \\ x_2' = y^2 + x_1 + 2x_2 \\ x_3' = y^3 + 3x_2 + x_3 \end{cases}$

Solution. a) linéaire à coefficients non constants et inhomogène; t est la variable indépendante et x, y, z sont dépendantes;

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & t \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} t^2 & 0 & \log t \end{pmatrix}.$$

b) non linéaire; les variables dépendantes sont u, v; la variable indépendante n'est pas indiquée.

c) non linéaire; les variables dépendantes sont t, x, y; la variable indépedante n'est pas indiquée.

d) linéaire inhomogène à coefficients constants; les variables dépendantes sont x_1, x_2, x_3; la variable dépendante est y;

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & y^2 & y^3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Résoudre les systèmes d'EDO directement.

a) $Y'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix} Y(t)$
b) $Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Y(t)$

c) $Y'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Y(t)$
d) $Y'(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} Y(t)$

Solution. a) On d'une part $x' = x\cos t$. Par séparation de variables, on trouve $x = C_1 e^{\sin t}$. De même, pour y on trouve $y = C_2 e^{-\cos t}$.

c) On trouve

$$Y(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{4t} \\ C_2 e^{3t} \\ C_3 e^{2t} \\ C_4 e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. Pour chaque système, vérifier s'il est diagonalisable. Le cas échéant, résoudre le système en diagonalisant (sans utiliser l'exponentielle matricielle).

a) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x \end{cases}$ c) $\begin{cases} x' = 3x - z \\ y' = 2x + 4y + 2z \\ z' = -x + 3z \end{cases}$

Solution. a) La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C'est une matrice symétrique, donc elle est diagonalisable. On trouve les valeurs prorpes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. On peut prendre les vecteurs propres associés $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. La solution est

$$Y(x) = e^x v_1 + e^{-x} v_2.$$

b) Non diagonalisable, car les valeurs propres sont complexes.

Exercice 4. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants. Ne pas utiliser l'exponentielle matricielle.

a) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = -z \\ z' = -y \\ x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = 0 \\ x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 5. Soit un système $Y' = A(x)Y + P(x)$, où $A \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times n)$ et $P \colon I \to \mathbb{R}^n$ sont continues. Soit $Y_h = C_1 Y_1 + \cdots + C_n Y_n$, où $Y_1, \ldots, Y_n$ sont n solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène $Y' = A(x)Y$. Soit Y_p une solution particulière de $Y' = A(x)Y + P(x)$. Montrer que la solution générale de l'EDO est $Y = Y_h + Y_p$.

Solution. D'abord, on voit que Y est une solution, puisque $Y' = Y_h' + Y_p' = AY_h + AY_p + P = A(Y_h + Y_p) + P = AY + P$.

Supposons que Y est une solution quelconque de l'EDO. Alors, on coit que $Z = Y - Y_p$ est une solution de l'équation homogène. Ainsi, $Z = Y_h$ et on a bien $Y = Y_h + Y_p$.

Exercice 6. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes directement (c'est-à-dire sans faire appel aux formules vues en classe).

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} x & 2x \\ 0 & x \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes. (Utilisez les techniques vues en classe, cette fois.)

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

Indication pour le b). Vous ne pouvez pas diagonaliser la matrice, mais vous devriez la trigonaliser. Pour ce faire, trouver un vecteur propre et compléter la base par n'importe quel vecteur linéairement indépendant.

Solution. a) Par calcul direct, on trouve que B possède les vecteurs propres $\lambda_\pm = \frac{1}{2}(5\pm\sqrt{13})$. On trouve ensuite des vecteurs propres respectifs : $v_\pm = \begin{pmatrix} \frac{-3\pm\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix}$. On pose $P = \begin{pmatrix} v_+ & v_- \end{pmatrix}$. On a

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}.$$

Ainsi, par l'une des propriétés de la matrice exponentielle, on a

$$e^{P^{-1}BP} = P^{-1}e^BP = \begin{pmatrix} e^{\lambda_+} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_-} \end{pmatrix} =: E.$$

En calculant PEP^{-1}, on trouve

$$\mathrm{e}^{\mathrm{B}} = \frac{1}{26}\mathrm{e}^{-3-\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 13+3\sqrt{13}+13e^{2\sqrt{13}}-3\sqrt{13}e^{2\sqrt{13}} & 2\sqrt{13}e^{2\sqrt{13}}-2\sqrt{13} \\ -3\sqrt{13}e^{2\sqrt{13}} & 13-3\sqrt{13}+13e^{2\sqrt{13}}+3\sqrt{13}e^{2\sqrt{13}} \end{pmatrix}.$$

b) La matrice A possède la valeur propre $\lambda = 1$ et le vecteur propre $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ensuite, on choisit $w = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, qui est linéairement indépendant. La matrice de passage $P = \begin{pmatrix} v & w \end{pmatrix}$ porte A en

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: J.$$

On a déjà calculé e^J, on trouve

$$e^J = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

On trouve donc

$$A = Pe^JP^{-1} = \begin{pmatrix} 3e & e \\ -4e & -e \end{pmatrix}.$$

Exercice 8. Soit $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k < n$. Soit $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$, $B \in \mathrm{Mat}(k \times k)$ et $C \in \mathrm{Mat}\big((n-k) \times (n-k)\big)$. Montrer que si A s'écrit en blocs

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix},$$

alors l'exponentielle de A a la forme

$$e^A = \begin{pmatrix} e^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^C \end{pmatrix}.$$

Ici, $\mathbf{0}$ peut désigner $0_{(n-k)\times k}$ ou $0_{k\times(n-k)}$ selon le cas, c'est-à-dire une matrice rectangulaire nulle qui a les bonnes dimensions pour que A soit carrée.

Solution. Il suffit de constater que

$$A^n = \begin{pmatrix} B^n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^n \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on voit que les sommes partielles sont

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_{k=0}^{n} \frac{C^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

Lorsque $n \to \infty$, on obtient la formule souhaitée.

Exercice 9. Utiliser le numéro précédent pour calculer l'exponentielle des matrices suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10. a) Montrer que $e^{A^T} = (e^A)^T$, où $\cdot^T$ désigne la transposition.

b) Calculer l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Résoudre les systèmes d'EDO suivants en utilisant l'exponentielle matricielle.

a) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$

b) $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y$

c) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$

d) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$

e) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y$

f) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$

Solution. Les solutions sont les colonnes de la matrice exponentielle e^{Ax}, où A est la matrice de l'EDO.

a) On a

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

La solution générale est

$$Y(x) = C_1 e^x e_1 + C_2 e^x e_2.$$

f) On calcule en blocs (voir le numéro 8) et on utilise les formule du cours. On obtient

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

La solution générale est donc

$$Y(x) = C_1 e^x e_1 + (C_2 e^x + C_3 x e^x) e_2 + C_3 e^x e_3.$$

Exercice 12. Donner la solution générale du système d'EDO suivant sans faire de calcul : $Y' = AY$, où A est 4×4, possède les valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et la paire conjuguée complexe $\lambda_3 = \alpha + i\beta$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solution. Soit v_1 et v_2 des vecteurs propres associés respectivement à λ_1 et λ_2. Soit w un vecteur propre complexe associé à λ_3. On pose $v_3 = \Re w$ et $v_4 = \Im w$. On pose $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{pmatrix}$ une matrice de passage. L'algèbre linéaire nous dit que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} =: J.$$

On pose $Z = P^{-1}Y$. Il suit que Z est une solution de l'EDO $Z' = JZ$. La solution générale se trouve à l'aide la matrice exponentielle, qui est

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha x}\cos\beta & -e^{\alpha x}\sin\beta \\ 0 & 0 & e^{\alpha x}\sin\beta & e^{\alpha x}\cos\beta \end{pmatrix} =: J.$$

La solution générale pour Z est alors

$$Z(x) = C_1 e^x e_1 + C_2 e^{2x} e_2 + e^{\alpha x}(C_3\cos\beta - C_4\sin\beta)e_3 + e^{\alpha x}(C_3\sin\beta + C_4\cos\beta)e_4.$$

Puisque $Y = PZ$ et que $Pe_j = v_j$, on a

$$Y(x) = C_1 e^x v_1 + C_2 e^{2x} v_2 + e^{\alpha x}(C_3\cos\beta - C_4\sin\beta)v_3 + e^{\alpha x}(C_3\sin\beta + C_4\cos\beta)v_4.$$