Équations différentielles

Série 7

Exercice 1. Pour chaque système d'EDO suivant, indiquer s'il est linéaire homogène, linéaire inhomogène, linéaire à coefficients constants ou non linéaire. S'il est linéaire, l'écrire sous forme matricielle. Indiquer également quelle est la variable indépendante et quelles sont les variables dépendantes. Ne pas résoudre.

a) $\begin{cases} x' = x + t^2 \\ y' = x + y + z \\ z' = 2x - 3y + tz + \log t \end{cases}$

b) $\begin{cases} u' = uv \\ v' = u - v \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = tx + y \\ y' = x + ty \\ t' = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1' = y + x_2 + x_3 \\ x_2' = y^2 + x_1 + 2x_2 \\ x_3' = y^3 + 3x_2 + x_3 \end{cases}$

Exercice 2. Résoudre les systèmes d'EDO directement.

a) $Y'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \sin t \end{pmatrix} Y(t)$

b) $Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} Y(t)$

c) $Y'(t) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} Y(t)$

d) $Y'(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} Y(t)$

Exercice 3. Pour chaque système, vérifier s'il est diagonalisable. Le cas échéant, résoudre le système en diagonalisant (sans utiliser l'exponentielle matricielle).

a) $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = 3x - z \\ y' = 2x + 4y + 2z \\ z' = -x + 3z \end{cases}$

Exercice 4. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants. Ne pas utiliser l'exponentielle matricielle.

a) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x' = x + y + z \\ y' = -z \\ z' = -y \\ x(0) = 1, y(0) = 0, z(0) = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x' = y \\ y' = z \\ z' = 0 \\ x(0) = 0, y(0) = 1, z(0) = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 5. Soit un système $Y' = A(x)Y + P(x)$, où $A\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times n)$ et $P\colon I \to \mathbb{R}^n$ sont continues. Soit $Y_h = C_1Y_1 + \cdots + C_nY_n$, où $Y_1, \ldots, Y_n$ sont n solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène $Y' = A(x)Y$. Soit Y_p une solution particulière de $Y' = A(x)Y + P(x)$. Montrer que la solution générale de l'EDO est $Y = Y_h + Y_p$.

Exercice 6. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes directement (c'est-à-dire sans faire appel aux formules vues en classe).

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} x & 2x \\ 0 & x \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 7. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes. (Utilisez les techniques vues en classe, cette fois.)

a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

Indication pour le b). Vous ne pouvez pas diagonaliser la matrice, mais vous devriez la trigonaliser. Pour ce faire, trouver un vecteur propre et compléter la base par n'importe quel vecteur linéairement indépendant.

Exercice 8. Soit $n, k \in \mathbb{N}$ avec $k < n$. Soit $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$, $B \in \mathrm{Mat}(k \times k)$ et $C \in \mathrm{Mat}\big((n-k) \times (n-k)\big)$. Montrer que si A s'écrit en blocs

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix},$$

alors l'exponentielle de A a la forme

$$e^A = \begin{pmatrix} e^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^C \end{pmatrix}.$$

Ici, $\mathbf{0}$ peut désigner $0_{(n-k)\times k}$ ou $0_{k\times(n-k)}$ selon le cas, c'est-à-dire une matrice rectangulaire nulle qui a les bonnes dimensions pour que A soit carrée.

Exercice 9. Utiliser le numéro précédent pour calculer l'exponentielle des matrices suivantes.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10. a) Montrer que $e^{A^T} = (e^A)^T$, où $\cdot^T$ désigne la transposition.

b) Calculer l'exponentielle de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Résoudre les systèmes d'EDO suivants en utilisant l'exponentielle matricielle.

a) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$

b) $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y$

c) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$

d) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$

e) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y$

f) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$

Exercice 12. Donner la solution générale du système d'EDO suivant sans faire de calcul : $Y' = AY$, où A est 4×4, possède les valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et la paire conjuguée complexe $\lambda_3 = \alpha + i\beta$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.