Équations différentielles

Série 6 (solutionnaire partiel)

Exercice 1. Trouver une solution particulière à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés et du principe de superposition.

a) $y'' + 3y = 2\cos x + 9x^2$ b) $y'' - 5y' + 4y = 4e^{2x} - 3e^x$ c) $y'' - y' = 4x + 8e^{2x}$

Solution. a) La solution homogène est $y_h = C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)$. On pose $y_1 = A\cos x + B\sin x$, qui est linéairement indépendante de y_h. On a

$$y_1'' + 3y_1 = (-A\cos x - B\sin x) + 3(A\cos x + B\sin x) = 2A\cos x + 2B\sin x = 2\cos x.$$

Ainsi, on trouve que $y_1 = \cos x$. Ensuite, on pose $y_2 = Ax^2 + Bx + C$. On a

$$y_2'' + 3y_2 = (2A) + 3(Ax^2 + Bx + C) = 3Ax^2 + 3Bx + (2A + 3C) = 9x^2.$$

On trouve $y_2 = 3x^2 - 2$.

Exercice 2. Trouver une solution particulière aux EDO linéaires inhomogènes suivantes en utilisant la méthode de variation des paramètres (la méthode de Lagrange).

a) $y'' - 4y = xe^x$ b) $y'' - 2y' + 2y = e^x$ c) $y'' - 4y = \sinh(2x)$
d) $y'' + \tan x y' = \sec x$ e) $y'' + 9y = \sin(3x)$ f) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$

Solution. On utilise les formules

$$u_1' = \frac{-y_2 r}{W} \qquad \text{et} \qquad u_2' = \frac{y_1 r}{W},$$

où W est le wronskien des solutions homogènes et r est le terme inhomogène de l'EDO.

c) La solution homogène est $y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$. La solution particulière est donnée par $y_p = u_1 e^{2x} + u_2 e^{-2x}$, où u_1 et u_2 sont données par les formules.

On a

$$W = W(e^{2x}, e^{-2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{-e^{-2x}\sinh(2x)}{-4} \\ &= \tfrac{1}{4}e^{-2x}\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} \\ &= \tfrac{1}{8}(1 - e^{-4x}). \end{aligned}$$

Si on intègre, on trouve

$$u_1 = \tfrac{1}{8}\int(1-e^{-4x})\mathrm{d}x = \tfrac{1}{8}(x+\tfrac{e^{-4x}}{4}).$$

Pour u_2, on a

$$\begin{aligned} u_2' &= \frac{e^{2x}\sinh(2x)}{-4} \\ &= -\tfrac{1}{4}e^{2x}\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} \\ &= -\tfrac{1}{8}(e^{4x}-1) \\ &= \tfrac{1}{8}(1-e^{4x}). \end{aligned}$$

On intègre pour obtenir

$$u_2 = \tfrac{1}{8}(x-\tfrac{e^{4x}}{4}).$$

La solution particulière est donc

$$y_p = u_1e^{2x}+u_2e^{-2x} = \tfrac{1}{8}(xe^{2x}+\tfrac{e^{-2x}}{4})+\tfrac{1}{8}(xe^{-2x}-\tfrac{e^{2x}}{4}) = \tfrac{1}{4}x\cosh(2x)-\tfrac{1}{16}\sinh(2x).$$

d) L'EDO n'est pas à coefficients constants. Il est tout de même possible de trouver la solution homogène par réduction d'ordre. On pose $z = y'$ et on obtient

$$\begin{aligned} z' + \tan xz = 0 &\Rightarrow \frac{z'}{z} = -\tan x \\ &\Rightarrow \int\frac{\mathrm{d}z}{z} = -\int\tan x\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \log|z| = \log|cosx| + F \\ &\Rightarrow z = C\cos x \\ &\Rightarrow y' = C\cos x \\ &\Rightarrow y = C\sin x + D. \end{aligned}$$

On a supposé que $z \neq 0$. Si $z = 0$, alors $y' = 0$, donc y est constante. Cette solution est fait déjà partie de la famille de solutions.

Ensuite, on pose $y_p = u_1y_1 + u_2y_2 = u_1 + u_2\sin x$. Le wronskien est

$$W = W(1,\sin x) = \begin{vmatrix} 1 & \sin x \\ 0 & \cos x \end{vmatrix} = \cos x.$$

(Remarque : le wronskien est nul en $x = \frac{\pi}{2}$. Cela n'est pas une contradiction, car l'EDO n'est pas définie en cette valeur de x.)

Pour u_1, on trouve

$$\begin{aligned}
u_1' &= \frac{-y_2 r}{W} \\
&= \frac{-\sin x \sec x}{\cos x} \\
&= -\frac{\sin x}{\cos^2 x}.
\end{aligned}$$

Si on intègre, on trouve

$$u_1 = -\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{\cos x}.$$

Pour u_2, on a

$$\begin{aligned}
u_2' &= \frac{\sec x}{\cos x} \\
&= \sec^2 x.
\end{aligned}$$

On intègre pour obtenir

$$u_2 = \int \sec^2 x \mathrm{d}x = \tan x.$$

La solution particulière recherchée est

$$y_p = u_1 + u_2 \sin x = -\sec x + \tan x \sin x.$$

Exercice 3. Calculer le wronskien des triplets de fonctions suivants.

a) e^x, x^2 et x

b) $\sin x$, $\cos x$ et x

Solution. a) On trouve

$$\begin{aligned}
W(e^x, x^2, x) &= \begin{vmatrix} e^x & x^2 & x \\ e^x & 2x & 1 \\ e^x & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= e^x \begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{vmatrix} + 0 \\
&= e^x(x^2 - 2x^2) - 2(e^x - xe^2) \\
&= -e^x(x^2 - 2x + 2).
\end{aligned}$$

Ce dernier polynôme est non nul, puisque son discrimant est $\Delta = 4 - 8 = -4$, donc aucune racine réelle.

Exercice 4. Trouver la solution générale des EDO suivantes.

a) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

b) $y''' + 5y'' + 19y' - 25y = 0$ ($\lambda = 1$ est une racine)

Solution. a) Le polynôme associé est $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)$. Ainsi, les zéros sont $0, 2, 1$. La solution générale est $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{2x}$.

b) On a $p(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 19\lambda - 25$. Sachant que 1 est une racine, on divise le polynôme. On trouve

$$p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 6\lambda + 25).$$

Ensuite, la formule quadratique donne

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = -3 \pm \tfrac{1}{2}i\sqrt{64} = -3 \pm 4i.$$

Les trois racines sont donc $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3 + 4i$ et $\lambda_3 = -3 - 4i$.

La solution générale est donc $y = C_1e^x + C_2e^{-3x}\cos(4x) + C_3e^{-3x}\sin(4x)$.

Exercice 5. Faire deux itérations (à la main) de la méthode d'Euler pour calculer une valeur approchée des constantes suivantes.

a) e à l'aide du PC

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1; \end{cases}$$

b) $\log 2$ à l'aide du PC

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Solution. Lorsque l'on calcule le j^e pas y_j, on utilise la formule

$$y_j = f(x_{j-1}, y_{j-1})x_j + y_{j-1} - f(x_{j-1}, y_{j-1})x_{j-1}.$$

Si on remplace x_j par $x_{j-1} + h$, la formule prend la forme très simple suivante

$$y_j = f(x_{j-1}, y_{j-1})h + y_{j-1}.$$

C'est cette forme que l'on utilise pour les calculs suivants.

a) On sait que $y(1) = e$, donc on approxime y sur l'intervalle $[0, 1]$. Puisqu'on fait deux itérations, on utilise $h = \frac{1-0}{2}$. On a également $f(x, y) = y$, $x_0 = 0$ et $y_0 = y(0) = 1$. Pour la première itération, on a

$$y_1 = f(x_0, y_0)h + y_0 = f(0, 1)\tfrac{1}{2} + 1 = \tfrac{3}{2}.$$

Pour la deuxième, on a

$$y_2 = f\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}\right)\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{3}{4} + \tfrac{3}{2} = \tfrac{3+6}{4} = \tfrac{10}{4} = 2{,}25.$$

Ainsi, notre approximation (plutôt rudimentaire) de e est 2,25. Les premières décimales de e sont en fait 2,81.

b) On sait que $y(2) = \log 2$. Ainsi, on approxime y sur $[1, 2]$. Puisqu'on fait deux itérations, on utilise un pas de $h = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$. On a également $f(x, y) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$ et $y_0 = y(1) = 0$. Pour la première itération, on a

$$y_1 = f(1, 0)\tfrac{1}{2} + y_0 = \tfrac{1}{2}.$$

Pour la deuxième itération, on a

$$y_2 = f(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2})\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{2+3}{6} = \tfrac{5}{6}.$$

Ainsi, notre approximation de $\log 2$ est $0{,}8\overline{3}$. Les premières décimales de $\log 2$ sont 0,69.