Équations différentielles

Série 5 (solutionnaire partiel)

Exercice 1. Réduire les EDO d'ordre deux suivantes à l'ordre un afin de les résoudre. Vous pouvez laisser la réponse sous la forme d'une intégrale si celle-ci est très compliquée à calculer.

a) $xy'' + y' = 1$

b) $y'' = \dfrac{1}{3x + y'} - 3$

c) $y'' = y'y$

d) $y'' + y^2 = 0$

Solution. a) On pose $z(x) = y'(x)$. On obtient

$$xz' + z = 1.$$

On peut appliquer la séparation de variables. Si $z \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} xz' + z = 1 &\Leftrightarrow xz' = 1 - z \\ &\Leftrightarrow \frac{z'}{1-z} = \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{1-z} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &\Leftrightarrow -\log|1-z| = \log|x| + D \\ &\Leftrightarrow |1-z| = E\frac{1}{|x|} \\ &\Leftrightarrow z = 1 - C\frac{1}{|x|}. \end{aligned}$$

On voit que le domaine de définition de z est $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. On s'intéresse donc à x dans l'un des deux intervalles. Dans les deux cas, on a $y' = z = 1 - C\frac{1}{x}$. (Si $x < 0$, on inclut le signe de $|x|$ dans le C.) On a ensuite

$$y' = 1 - C\frac{1}{x} \Rightarrow y = x - C\log x + F.$$

On a donc trouvé la solution générale de l'EDO.

Enfin, on voit que $z \equiv 1$ est une solution, donc $y = x + C$ est une solution. Or, elle fait déjà partie de la famille de solutions.

d) On pose $z(y(x)) = y'(x)$. On obtient ainsi $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}z = y''(x)$. On a

$$\begin{aligned}
z'z + y^2 = 0 &\Leftrightarrow z'z = -y^2 \\
&\Leftrightarrow \int z\mathrm{d}z = -\int y^2 \mathrm{d}y \\
&\Leftrightarrow \frac{z^2}{2} = -\frac{y^3}{3} + C \\
&\Leftrightarrow (y')^2 = -\frac{2y^3}{3} + 2C \\
&\Leftrightarrow y' = \pm\sqrt{2C - \tfrac{2}{3}y^3} \\
&\Leftrightarrow \pm\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2C - \frac{2}{3}y^3}} = \int \mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{2C - \frac{2}{3}y^3}} = \pm x + D.
\end{aligned}$$

On laisse la solution sous cette forme implicite, puisque l'intégrale est compliquée.

Exercice 2. Montrer que les fonctions suivantes sont linéairements indépendantes.

a) e^x et xe^x b) $\cos x$ et $x\cos x$ c) e^x et e^{2x}

Solution. a) Si e^x et xe^x étaient linéairement indépendantes, on aurait $e^x = \lambda xe^x$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$. Or, en $x = 0$, on a $1 = \lambda \cdot 0$, ce qui est impossible.

Exercice 3. Réduire les EDO d'ordre n suivantes à un système de n EDO d'ordre un, sans les résoudre.

a) $u'' + \lambda^2 u = 0$ b) $v''' + \cos(v)v' = 2t$ c) $x^n y^{(n)} + \cdots + xy' + y = e^x$

Solution. a) On pose $u_1 = u$ et $u_2 = u'$. On obtient

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = -\lambda^2 u_1. \end{cases}$$

b) On pose $u_1 = v$, $u_2 = v'$ et $u_3 = v''$. On obtient

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = 2t - \cos(u_1)u_2. \end{cases}$$

c) Pour $1 \leq j \leq n$, on pose $u_j = y^{(j-1)}$. On a

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = u_3, \\ \quad \vdots \\ u_{n-1}' = u_n, \\ u_n' = \frac{1}{x^n}\left(e^x - u_1 - xu_2 - \cdots - x^{n-1}u_n\right). \end{cases}$$

Exercice 4. Pour chaque paire de fonctions suivantes, trouver une EDO linéaire pour laquelle elles sont solutions et montrer qu'elles sont linéairement indépendantes à l'aide du Wronskien.

a) e^x et xe^x b) e^x et e^{2x} c) $\sin x$ et $\cos x$

Solution. Dans les trois parties, on cherche une EDO de la forme $ay'' + by' + cy = 0$, dont le polynôme caractéristique est $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$.

a) Il suffit que $\lambda = 1$ soit une racine double. Ainsi, $p(\lambda) = (\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$. L'EDO est donc $y'' - 2y' + y = 0$. Ensuite, le calcul du Wronskien donne

$$W(e^x, xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} + xe^{2x} - xe^{2x} = e^{2x} \neq 0.$$

b) Il suffit que $\lambda = 1$ et $\lambda = 2$ soit deux racines du polynôme caractéristique. On a donc $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. L'EDO recherchée est donc $y'' - 3y' + 2y = 0$. Ensuite, le Wronskien est

$$W(e^x, e^{2x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \neq 0.$$

c) Il suffit que $\lambda = \pm i$ soit les racines du polynôme. On a donc $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ et l'EDO est $y'' + y = 0$. Le Wronskien donne dans ce cas $W = -1$.

Exercice 5. Résoudre les EDO linéaires homogènes d'ordre deux suivantes.

a) $y'' - 4y = 0$ b) $y'' - 2y' + 2y = 0$ c) $y'' + 4y' + 4y = 0$

Solution. a) On a $p(\lambda) = \lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2)$. Ainsi, la solution homogène est $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$.

b) On a $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. La formule quadratique donne $\lambda = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4 - 8}) = 1 \pm i$. La solution générale est donc $y = C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x$.

c) Le polynôme a la racine double $\lambda = 2$. La solution générale est $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

Exercice 6. Trouver une solution particulière aux EDO linéaires inhomogènes suivantes en utilisant la méthode des coefficients indéterminés. (Notez que ce sont les mêmes solutions homogènes qu'à l'exercice précédent.)

a) $y'' - 4y = x^2$ b) $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}$ c) $y'' + 4y' + 4y = 6\cos(2x)$

Solution. a) On cherche une solution de la forme $y_p = Ax^2 + Bx + C$. Comme la solution homogène est $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$, on voit que ce choix de y_p est linéairement indépendant de la solution homogène.

On a $y' = 2Ax + B$ et $y'' = 2A$. On substitue dans l'EDO pour trouver

$$2A - 4(Ax^2 + Bx + C) = -4Ax^2 - 4Bx + (2A - 4C) = x^2.$$

On a donc $B = 0$, $2A = 4C$ et $-4A = 1$. On trouve ainsi $y_p = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}$.

Exercice 7. Résoudre les EDO linéaires du deuxième ordre suivantes. Si vous utiliser la méthode des coefficients indéterminés, assurez-vous que le candidat est linéairement indépendant de la solution homogène.

a) $y'' + 2y' - 3y = 2\cos x$ b) $y'' + 4y' + 5y = \sin x$ c) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

Solution. c) Le polynôme caractéristique est $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. Ainsi, la solution homogène est $y_h = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$.

Par la méthode des coefficients indéterminées, on cherche une solution de la forme $y_p = Ae^{2x}$. Celle-ci est linéairement dépendante de y_h, donc on essaie $y_p = Axe^{2x}$. Elle est encore linéairement dépendante, donc on essaie $y_p = Ax^2e^{2x}$. Cette fois, elle est indépendante. On a

$$\begin{aligned} y_p' &= 2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x} \\ y_p'' &= 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x} \\ &= 2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x}. \end{aligned}$$

Si on remplace, on trouve

$$\begin{aligned} y_p'' - 4y_p' + 4y_p &= (2Ae^{2x} + 8Axe^{2x} + 4Ax^2e^{2x}) - 4(2Axe^{2x} + 2Ax^2e^{2x}) + 4(Ax^2e^{2x}) \\ &= (4A - 8A + 4A)x^2e^{2x} + (8A - 8A)xe^{2x} + (2A)e^{2x} \\ &= 2Ae^{2x} = e^{2x}. \end{aligned}$$

On trouve donc $y_p = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$. La solution générale est $y = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^{2x}$.

Exercice 8. Résoudre les EDO suivantes. Assurez-vous de trouver les solutions singulières s'il y a lieu.

a) $y''(x) - \big(y'(x)\big)^2 = 1$ b) $2y'' - 2y' - 4 = x$

c) $u'' + u^2u' = 0$ d) $y'' + 4y' + 8 = \cos x$

e) $(1+x)y'' - y' = 1$

Solution. a) Ce n'est pas une EDO linéaire. On voit que x et y sont absents de l'équation, on a donc deux façon de réduire l'ordre. Il est possible que l'une soit plus facile que l'autre, mais il n'y pas de façon de le savoir avant d'essayer. Ainsi, on pose $z(x) = y'(x)$. On obtient l'EDO $z' - z^2 = 1$. Elle se résout par séparation de variables. On a

$$\begin{aligned} z' - z^2 = 1 &\Rightarrow z' = 1 + z^2 \\ &\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \int \mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \arctan z = x + C \\ &\Rightarrow z = \tan(x+C) \\ &\Rightarrow y' = \tan(x+C) \\ &\Rightarrow y = -\log|\cos(x+C)| + D. \end{aligned}$$

c) Ce n,est pas une EDO linéaire. Comme x est absent dans l'équation, on pose $z(u(x)) = u'(x)$. On a $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}z = u''$. On obtient l'EDO $z'z + u^2 z = 0$. Si $z \neq 0$, on simplifie les z et on intègre. On obtient $z = -\frac{u^3}{3} + C$. Si $z = 0$, alors $u \equiv$ const et on voit que cela est une solution, peu importe la constante.

Ensuite, on a $u' = z = -\frac{u^3}{3} + C$. On résout par séparation de variables. On a

$$\begin{aligned} u' = -\frac{u^3}{3} + C &\Rightarrow u' = \frac{3C - u^3}{3} \\ &\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}u}{3C - u^3} = \frac{1}{3}\int \mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}u}{3C - u^3} = \frac{x}{3} + E. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale est labourieuse à résoudre, mais il est possible de faire. Je ne m'attends pas que vous fassiez ce calcul, mais je l'inclus pour vous montrer qu'il ne faut pas se décourager face à un calcul qui semble impossible.

D'abord, afin de simplifier, on pose $A^3 = 3C$. Le numérateur est donc $A^3 - u^3 = (A-u)(u^2+Au+A^2)$. le discriminant du facteur de degré deux est $\Delta = A^2 - 4A^2 = -3A^2 < 0$, donc c'est un polynôme de degré deux irréductible. On décompose maintenant en fractions partielles. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{A^3 - u^3} &= \frac{B}{A-u} + \frac{Cu + D}{u^2 + Au + A^2} \\ &= \frac{B(u^2 + Au + A^2) + (Cu + D)(A - u)}{(A-u)(u^2 + Ax + A^2)} \\ &= \frac{(B - C)u^2 + (AB + AC - D)u + (BA^2 + AD)}{A^3 - u^3}. \end{aligned}$$

On obtient les trois équations

$$B - C = 0, \qquad AB + AC - D = 0, \qquad BA^2 + AD = 1.$$

On en retire que $B = C$ et $D = 2AB$. On substitue D dans la dernière équation pour obtenir

$$BA^2 + A(2AB) = 1 \Leftrightarrow 3A^2 B = 1.$$

Si $A = 0$, alors il est facile de calculer l'intégrale, donc on suppose que $A \neq 0$. On a

$$B = C = \frac{1}{3A^2} \quad \text{et} \quad D = \frac{2}{3A} = \frac{2A}{3A^2}.$$

Enfin, les fractions partielles sont

$$\frac{1}{u^3} = \frac{1}{3A^2}\frac{1}{A-u} + \frac{1}{3A^2}\frac{u+2A}{u^2+Au+A^2}.$$

On est maintenant prêt à intégrer. On a

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}u}{A^3 - u^3} &= \frac{1}{3A^2}\int \left(\frac{1}{A-u} + \frac{u+2A}{u^2+Au+A^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{3A^2}\log|A-u| + \frac{1}{3A^2}\int \frac{u+2A}{u^2+Au+A^2}\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Ensuite, pour l'autre intégrale, on pose $v = u^2 + Au + A^2$, alors on obtient $\mathrm{d}v = (2u + A)\mathrm{d}u$. On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{u+2A}{u^2+Au+A^2}\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\int \frac{2u+4A}{u^2+Au+A^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2u+A}{u^2+Au+A^2}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int \frac{3A}{u^2+Au+A^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\log|u^2+Au+A^2| + \frac{3A}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+Au+A^2}.\end{aligned}$$

Pour intégrer la dernière intégrale, on complète le carré :

$$u^2 + Au + A^2 = \left(u + \tfrac{A}{2}\right)^2 + \tfrac{3A^2}{4} = \tfrac{3A^2}{4}\left(\tfrac{4}{3A^2}\left(u + \tfrac{A}{2}\right)^2 + 1\right).$$

On fera le changement de variable $w = \frac{2}{\sqrt{3}A}\left(u + \frac{A}{2}\right)$. On a

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+Au+A^2} &= \frac{4}{3A^2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\frac{4}{3A^2}\left(u+\frac{A}{2}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{4}{3A^2}\frac{\sqrt{3}A}{2}\int \frac{\mathrm{d}w}{w^2+1} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3A}\arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}A}\left(u + \tfrac{A}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Enfin, en combinant, on trouve

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{A^3 - u^3} = -\frac{1}{3A^2}\log|A-u| + \frac{1}{6A^2}\log(u^2 + Au + A^2) + \frac{\sqrt{3}}{3A^2}\arctan\left(\tfrac{2}{\sqrt{3}A}\left(u + \tfrac{A}{2}\right)\right).$$

e) On fait le changement de variable $z(x) = y'(x)$. La réponse finale est $y(x) = C(x + \frac{1}{2}x^2) - x + D$. Pour toute constante E, $y \equiv E$ est une solution singulière.

Exercice 9. *La fonction d'erreur.* Soit le problème de Cauchy suivant

$$(*) \quad \begin{cases} y'' = -2xy', \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}. \end{cases}$$

On appelle $\mathrm{erf}(x)$ la solution à ce problème; c'est la fonction d'erreur. Elle fait partie des fonctions que l'on appelle parfois *fonctions spéciales*.

a) Faire la substitution $u(x) = y'(x)$ pour obtenir une EDO d'ordre 1 et résoudre cette EDO d'ordre 1.

b) Résoudre l'EDO $y' = u$: la solution devra s'écrire comme une intégrale définie

$$C\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t + D.$$

Trouver la fonction $f(t)$ et les constantes x_0, C et D de sorte à satisfaire au problème de Cauchy $(*)$. Conclure que la fonction $\mathrm{erf}(x)$ s'écrit sous la forme intégrale trouvée.

c) Montrer que $y(x) = \mathrm{erf}(x)e^{x^2}$ est une solution de $y'' - 2xy' - 2y = 0$.

Solution. a) On obtient $u' = -2xu$. Par séparation de variables, on trouve $u = Ce^{-x^2}$.

b) On a $y' = u$. En intégrant, on trouve $y = C\int e^{-x^2}\mathrm{d}x + D$. On a donc $f(t) = e^{-t^2}$. Ensuite, pour les constantes, comme on veut $y(0) = 0$, on peut prendre $x_0 = 0$ et $D = 0$ (il y a plusieurs choix possible, mais on prend ce qui semble être le plus simple). Pour trouver C, on a $y'(0) = Ce^0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$. Ainsi, la solution au problème de Cauchy est

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

c) On note d'abord que $\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$. On a

$$\begin{aligned} y' &= \mathrm{erf}'(x)e^{x^2} + 2x\,\mathrm{erf}(x)e^{x^2} \\ &= \tfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}e^{x^2} + 2x\,\mathrm{erf}(x)e^{x^2} \\ &= \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} + 2x\,\mathrm{erf}(x)e^{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= 2\,\mathrm{erf}(x)e^{x^2} + 2x\tfrac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}e^{x^2} + 4x^2\,\mathrm{erf}(x)e^{x^2} \\ &= \tfrac{4x}{\sqrt{\pi}} + 2\,\mathrm{erf}(x)e^{x^2} + 4x^2\,\mathrm{erf}(x)e^{x^2}. \end{aligned}$$

On substitue maintenant dans l'EDO. On obtient

$$\begin{aligned}
y'' - 2xy' - 2y &= \Big(\tfrac{4x}{\sqrt{\pi}} + 2\operatorname{erf}(x)e^{x^2} + 4x^2 \operatorname{erf}(x)e^{x^2}\Big) - 2x\Big(\tfrac{2}{\sqrt{\pi}} + 2x \operatorname{erf}(x)e^{x^2}\Big) - 2\Big(\operatorname{erf}(x)e^{x^2}\Big) \\
&= \tfrac{4x}{\sqrt{\pi}} - \tfrac{4x}{\sqrt{\pi}} + \operatorname{erf}(x)e^{x^2}\Big(2 + 4x^2 - 4x^2 - 2\Big) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'où y est une solution.

Exercice 10. *Ressort suspendu.* Un poids est suspendu au plafond par un ressort. On suppose qu'il n'y a pas de résistance de l'air, ni de frottement. Décrire la position $y(t)$ au temps t du poids à l'aide d'une EDO. Indiquer si les constantes éventuelles sont positives ou négatives. Trouver la ou les solution(s) constante(s) et expliquer ce qu'elle(s) représente(nt) physiquement.

Solution. La force de gravité tire toujours vers le bas et elle est constante. Le ressort applique une force qui pousse vers le bas si le ressort est contracté et qui tire vers le haut le ressort est étiré. On prend comme repère l'axe des y verticale parallèle la force de gravité et orienté en pointant vers le haut. On pose l'origine $y = 0$ à la hauteur où le ressort est au repos. (Autrement dit, si le poids se trouve à $y = 0$, alors la force du ressort est nul). Dans ce cas, le force du ressort est directement proportionnelle à la position y. On obtient l'EDO

$$y'' + ay + b = 0,$$

où b est une constante négative, car la force de gravité tire vers le bas et a est aussi une constante négative, car lorsque $y > 0$, la force du ressort pousse vers le bas et lorsque $y < 0$, elle tire vers le haut.

Si $y \equiv C$ est une solution constante, alors $y'' = 0$ et C doit satisfaire à $aC + b = 0$. Ainsi, il n'y a qu'une seule solution constante : $y = -\frac{b}{a}$. Cette solution représente le cas où le poids est immobile à la position d'équilibre. Autrement dit, le poids n'a aucune vitesse de départ et la force du ressort compense exactement la force de gravité, ce qui laisse le poids immobile.