Équations différentielles

Série 4 (solutionnaire partiel)

Exercice 1. Résoudre les EDO suivantes. Assurez-vous de trouver les solutions singulières s'il y en a.

a) $x^2y' = x^2 + y^2$

b) $\log y + 2xy + y'\left(\frac{x}{y} + x^2\right) = 0$

c) $\log y + \left(\frac{x}{y} + 1\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$

d) $a' = \frac{a^2+b^2}{ab}$

e) $y' = y^2 + x^2 + 2xy$

f) $\frac{1}{2}(\cos x)y' - (\sin x)y = \tan x$

g) $t^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = t^2 + st + s^2$

Solution. c) $x\log y + y = C$, d) $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \log|b| + C$,

f) $\frac{1}{2}y\cos^2 x + \cos x = C$

Exercice 2. Trouver un facteur intégrant et résoudre l'EDO.

a) $2(y+1) + xy' = 0$ b) $y^2 + y + xy' = 0$ c) $y(1+x) + xy' = 0$

Solution. b) On peut essayer de trouver un facteur qui dépend de x, mais ça ne fonctionnera pas. On cherche donc μ, une fonction de y, telle que

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(y^2+y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu x).$$

On obtient donc l'EDO

$$\begin{aligned}
\mu'(y^2+y) + \mu(2y+1) = \mu &\Leftrightarrow \mu'(y^2+y) = -2y\mu \\
&\Leftrightarrow \int\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = -2\int\frac{\mathrm{d}y}{y+1} \\
&\Leftrightarrow \log|\mu| = -2\log|y+1| + D \\
&\Leftrightarrow \mu(y) = \frac{C}{(y+1)^2}.
\end{aligned}$$

L'EDO suivante est maintenant exacte

$$\frac{y^2+y}{(y+1)^2} + \frac{x}{(y+1)^2}y' = 0.$$

On trouve $\varphi(x,y) = \frac{xy}{y+1}$.

Exercice 3. Dire quelles équations sont linéaires. Ne pas résoudre.

a) $xy' = x^2y + 3$ b) $y^2 + (y')^2 = 1$ c) $y' = y\cos x + \frac{2y}{x^2}$

Solution. a) linéaire, b) non linéaire, c) linéaire

Exercice 4. Résoudre les équations linéaires suivantes.

a) $y' = (x+2)y$ b) $x + \frac{y'}{y\cos x} = 0$

Solution. a) $y = Ce^{x^2/2+2x}$

Exercice 5. Trouver la solution homogène des EDO suivantes.

a) $y' = y\log x + e^{x^2}$ b) $y' = \frac{xy+x^2y+\sin x}{x^2}$

Exercice 6. La solution homogène de $y' - \frac{1}{x}y = 0$ est $y_h(x) = Cx$. Trouver une solution particulière aux EDO inhomogènes suivantes.

a) $y' - \dfrac{1}{x}y = \dfrac{1}{x^2+1}$ b) $y' - \dfrac{1}{x}y = e^x$

c) $y' - \dfrac{1}{x}y = \log x$ d) $y' - \dfrac{1}{x}y = x\cos x$

Solution. a) La solution homogène est $y = Cx$. On cherche une solution particulière de la forme $y = ux$. On a $y' = u + xu$ et donc

$$\begin{aligned} y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2+1} &\Leftrightarrow u + u'x - \frac{1}{x}(xu) = \frac{1}{x^2+1} \\ &\Leftrightarrow u'x = \frac{1}{1+x^2} \\ &\Leftrightarrow u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)} + C \\ &\Leftrightarrow u = \log x - \tfrac{1}{2}\log(x^2+1) + C. \end{aligned}$$

La solution particulière est donc

$$y_p = x\log x - \tfrac{x}{2}\log(x^2+1).$$

Exercice 7. Chaînette. Un câble de densité uniforme est suspendu par les points $(-L, H)$ et (L, H). La forme du câble satisfait à l'équation différentielle

$$ay''(x) = \sqrt{1 + (y'(x))^2},$$

où $y(x)$ est la hauteur du câble au point x et a est une constante non nulle. Trouver la forme du câble.

Solution. On pose $z(x) = y'(x)$. On obtient l'EDO

$$az'(x) = \sqrt{1+z^2}.$$

Par séparation de variable, on a

$$z(x) = \frac{1}{a}\sinh(x+C).$$

Ensuite, on résout $y'(x) = z(x)$. On obtient

$$y(x) = \frac{1}{a}\cosh(x+C) + D.$$

On sait que $y(H) = L$ et $y(-H) = L$, donc on trouve $C = 0$ et $D = L - \frac{1}{a}\cosh(H)$.