Équations différentielles

Série 3 (solutionnaire partielle)

Exercice 1. Résoudre les EDO suivantes. Assurez-vous de trouver les solutions singulières s'il y en a.

a) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y + x$

b) $(x\cos y)y' + \sin y = 0$

c) $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$

d) $y' = 1 - x\cos(x-y)$

e) $\dfrac{\log y - \log x}{y} y' = \dfrac{1}{x}$

f)† $y' = \dfrac{y^2 + 2xy - x^2}{xy + x^2}$

Solution. a) $y = Ce^x - x - 1$, b) $x\sin y = C$

c) On a

$$\begin{aligned}
xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y &\Leftrightarrow y' = \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} + \frac{y}{x} \\
&\Leftrightarrow u + xu' = \sqrt{1+u^2} + u \qquad (u = \tfrac{y}{x}) \\
&\Leftrightarrow xu' = \sqrt{1+u^2} \\
&\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{arsinh} u = \log|x| + C \\
&\Leftrightarrow \frac{y}{x} = \sinh(\log|x| + C) \\
&\Leftrightarrow y = x\sinh(\log|x| + C).
\end{aligned}$$

d) $\log|\tan(\frac{y}{x}) + \sec(\frac{y}{x})| = \frac{x^2}{2} + C$ (Changement de variable $u = x - y$)

e) On a

$$\begin{aligned}
\frac{\log y - \log x}{y} y' = \frac{1}{x} &\Leftrightarrow \log(\tfrac{y}{x}) y' = \tfrac{y}{x} \\
&\Leftrightarrow \log(u)(u + xu') = u \\
&\Leftrightarrow xu' = \frac{u - u\log u}{\log u} \\
&\Leftrightarrow \int \frac{\log u}{u - u\log u} \mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int \frac{t}{1-t}\mathrm{d}t = \log|x| + C && (t = \log u)\\
&\Leftrightarrow -\log(1-t) + 1 - t = \log|x| + C\\
&\Leftrightarrow -\log(1-\log u) + 1 - \log u = \log|x| + C\\
&\Leftrightarrow -\log\left(1 - \log\left(\tfrac{y}{x}\right)\right) + 1 - \log\left(\tfrac{y}{x}\right) = \log|x| + C.
\end{aligned}$$

C'est la solution générale.

f) $\dfrac{y}{x} + 2\log\left|\dfrac{y}{x} - 1\right| = \log|x| + C$

Exercice 2. *Interprétation géométrique de la forme normale*. Soit l'EDO $y' = f(x,y) = xy$.

a) Trouver la famille de solutions générales.

b) Trouver la solution singulière.

c) Tracer le graphe des solutions y_1, y_2, y_3, y_4 satisfaisant aux conditions initiales

$$y_1(0) = 1, \qquad y_2(0) = 3,$$
$$y_3(0) = -1, \qquad y_4(0) = -3,$$

ainsi que le graphe de la solution singulière.

d) Tracer quelques vecteurs du champ de vecteurs

$$V(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ xy \end{pmatrix}$$

sur les courbes tracées en c). Quel est le lien entre les vecteurs tracés et les solutions? Justifier.

Exercice 3. Vérifier si les EDO suivantes sont exactes, au quel cas, résoudre par la méthode des équations exactes.

a) $\cos x \cos y - (\sin x \sin y)y' = 0$

b) $-x\sin x - y^2 \sin x + \cos x + (2y\cos x)y' = 0$

c) $xy + x^2 y' = 0$

Solution. a) On a

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos x\cos y = -\sin x\cos y \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial y}(-\sin x\sin y) = -\sin x\cos y.$$

Puisque $\cos x\cos y$ et $-\sin x\sin y$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on sait que l'EDO est exacte. On trouve $\varphi(x,y) = \sin x\cos y$.

Exercice 4. Soit $y' = f(x,y)$ une EDO. Soit $\varphi\colon (x,y) \mapsto \varphi(x,y)$ une fonction de classe C^1 telle que $\varphi(x,y) = C$ est la solution générale de l'EDO.

a) Montrer que la pente de la tangente au point (x, y) d'une solution qui passe par le point (x, y) est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\partial_x \varphi(x, y)}{\partial_y \varphi(x, y)},$$

où $\partial_x \varphi$ et $\partial_y \varphi$ sont respectivement les dérivées partielles de φ par rapport à x et y.

b) Montrer que les champs de vecteurs

$$\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} -\partial_y \varphi(x, y) \\ \partial_x \varphi(x, y) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{W}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y) \end{pmatrix}$$

sont en tout point parallèles*. Conclure que $\vec{V}$ est en tout point tangent aux solutions générales.

Solution. b) On a

$$-\frac{1}{\partial_y \varphi(x, y)} \vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{\partial_x \varphi(x, y)}{\partial_y \varphi(x, y)} \end{pmatrix} = \vec{W}(x, y),$$

d'où ils sont parallèles.

Exercice 5. Transformer les EDO d'ordre 2 en systèmes d'EDO d'ordre 1. Ne pas résoudre.

a) $y'' = x + y^2$ b) $z' - z'' = x - z$ c) $y'' = x^2 + y^2 + (y')^2$

Exercice 6. Résoudre les systèmes suivants. Si possible, dessiner une solution dans le plan xy.

a) $\begin{cases} x'(t) = t^2, \\ y'(t) = t^3. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x'(t) = \sin t, \\ y'(t) = x(t) \sin t. \end{cases}$ c) $\begin{cases} x'(t) = x(t)y(t), \\ y'(t) = \dfrac{y(t)}{x(t)}. \end{cases}$

Solution. a) On résout chaque équation séparemment. On trouve $x(t) = \dfrac{t^3}{3} + C$ et $y(t) = \dfrac{t^4}{4} + D$.

b) On résout pour x. On trouve $x(t) = -\cos t + C$. On remplace dans y' et on intègre. On trouve $y(t) = -\dfrac{1}{2}(t - \sin t \cos t) - C \cos t + D$.

c) On a

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{x} + C.$$

* Deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont parallèles s'il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{w}$.

On remplace y dans x'. On obtient

$$x' = -1 + \frac{C}{x} \quad \Rightarrow \quad -C \log |C - x| + C - x = t + D.$$

Ensuite, on remplace $x = \dfrac{1}{C - y}$ dans y'. On a

$$y' = \frac{y}{C - y} \quad \Rightarrow \quad C \log |y| - y = t + E.$$

Exercice 7. Calculer la longueur des courbes suivantes.

a) $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(t-1)^2, \\ y(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{t^3} \end{cases}$, où $t \in [0, 1]$

b) $\begin{cases} x(t) = \log t, \\ y(t) = t, \end{cases}$ où $t \in [1, 2]$

c) $y = \cosh x$, $x \in [0, \log 2]$

d) $2x = \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{y}$, $y \in [1, 4]$.

Exercice supplémentaire

Cette section est optionnelle.

Définition. Soit $\varphi \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe. Soit $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a, b]$. On pose

$$\ell(P) = \sum_{j=1}^{n} \|\varphi(x_j) - \varphi(x_{j-1})\|.$$

On définit

$$\ell(\varphi) = \sup_{P \in \mathcal{P}} \ell(P),$$

où le suprémum est pris sur l'ensemble $\mathcal{P}$ de toutes les partitions de $[a, b]$. On dit que φ est *rectifiable* lorsque $\ell(\varphi) < \infty$.

On peut interpréter la définition de $\ell(\varphi)$ comme la version « somme de Riemann » de la longueur d'arc. Cette définition est utilisable pour certaines courbes qui ne sont pas de classe C^1.

Exercice 8. Soit $\varphi \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe et soit $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ une partition de $[a, b]$.

a) Interpréter géométriquement $\ell(P)$ sur la trace de φ dans le plan xy.

b) Montrer que si φ est de classe C^1, alors φ est rectifiable.

c) On a déjà défini la longueur pour les courbes de classe C^1. On veut montrer que cette définition coïncide avec $\ell(\varphi)$. En supposant que φ est de classe C^1, montrer que

$$\|\varphi(x_{j+1}) - \varphi(x_j)\| \leq \int_{x_j}^{x_{j+1}} \|\varphi'(t)\| \mathrm{d}t.$$

Conclure que $\ell(P) \leq \int_a^b \|\varphi'(t)\| \mathrm{d}t =: L$ et donc que $\ell(\varphi) \leq L$.

d)[†] Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ et une partition $Q = \{y_0, \ldots, y_m\}$ tels que pour tout $j = 0, \ldots, m-1$ et pour tout $x \in [y_j, y_{j+1}$, on a

$$\|\varphi'(x)\| \leq \varepsilon + \|\varphi'(y_j)\|.$$

e)[†] Montrer que

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} \|\varphi'(t)\| \mathrm{d}t \leq \|\varphi(y_{j+1}) - \varphi(y_j)\| + 2\varepsilon(y_{j+1} - y_j).$$

f) Déduire que

$$L \leq \ell(Q) + 2\varepsilon(b-a).$$

g) Conclure que $L \leq \ell(\varphi)$.

Les numéros avec une dague nécessite la continuité uniforme vue en analyse 2 (ou parfois en analyse 1).