Équations différentielles

Série 2 (solutionnaire partiel)

EDO d'ordre 1

Exercice 1. Vérifier que les équations suivantes sont une solution des EDO.

a) $y = \sqrt{x}$ est une solution de $y' = \frac{1}{2y}$, où $x, y > 0$.

b) $y = e^{x^2}$ est une solution de $y' = 2xy$.

c) $\varphi(x, y) = x^2 + 2y^3 = C$ est une solution de $2x + 6y^2y' = 0$.

d) $\varphi(x, y) = (x - \sin y)^2 = C$ est une solution de $y' = \sec y$.

e) $\log y + xy = C$ est solution de $\left(\frac{1}{y} + x\right) y' + y = 0$.

Solution. e) On dérive et on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log y + xy) &= \frac{y'}{y} + y + xy' \\
&= y'\left(\frac{1}{y} + x\right) + y \\
&= 0.
\end{aligned}$$

On voit que c'est une solution.

Exercice 2. Séparation de variables. Résoudre les EDO suivantes par la méthode de séparation de variables. Trouver également les solutions singulières.

a) $y' = \dfrac{x}{y+1}$ b) $x^2 + xyy' = 1$ c) $y' = xy + y + x + 1$

Solution. b) On a, pour $y \neq 0$,

$$\begin{aligned}
x^2 + xyy' = 1 &\Leftrightarrow xyy' = 1 - x^2 \\
&\Leftrightarrow yy' = \frac{1 - x^2}{x} = \frac{1}{x} - x \\
&\Leftrightarrow \int y\mathrm{d}y = \int \left(\frac{1}{x} - x\right) \mathrm{d}x \\
&\Leftrightarrow y^2 = \log|x| - \tfrac{x^2}{2} + C.
\end{aligned}$$

C'est la solution implicite. Pour la rendre explicite, on prend la racine carrée des deux côtés et on obtient deux expression, l'une avec le signe + et l'autre, le signe -.

De plus, les fonctions constantes ne sont pas des solutions, même si on a supposé que $y \neq 0$.

Exercice 3. Résoudre les EDO suivantes en utilisant le changement de variable $u = \dfrac{y}{x}$.

a) $y' = y + \dfrac{y}{x}$ b) $x^2 y' = xy + y^2$ c) $y' = \dfrac{2y}{x-2y}$

Solution. c) On a

$$y' = \frac{2y}{x-2y} = \frac{2\frac{y}{x}}{1-2\frac{y}{x}}.$$

Avec $u = \dfrac{y}{x}$, on a $xu = y$ et donc $u + xu' = y'$. On obtient donc la nouvelle EDO

$$\begin{aligned} u + xu' = \frac{2u}{1+2u} &\Leftrightarrow xu' = \frac{2u}{1+2u} - \frac{u+2u^2}{1+2u} \\ &\Leftrightarrow xu' = \frac{u+2u^2}{1+2u} \\ &\Leftrightarrow xu' = u\frac{1+2u}{1+2u} \\ &\Leftrightarrow \frac{u'}{u} = \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &\Leftrightarrow \log|u| = \log|x| + D \\ &\Leftrightarrow u = De^{|x|}. \end{aligned}$$

On doit avoir $u \neq -\dfrac{1}{2}$, mais $u = -\dfrac{1}{2}$ n'est pas une solution. Ainsi, la solution générale est $y = Dxe^{|x|}$.

Exercice 4. Résoudre les EDO suivantes en utilisant le changement de variable $u = ax + by$.

a) $y' = x(x+y) - 1$ b) $y' = \sqrt{-y^2 - 4xy - 4x^2 + 1} - 2$

c) $y' = \dfrac{3y+x}{3y-3x}$

Solution. b) D'abord, on remarque que $-y^2 - 4xy - 4x^2 = -(y+2x)^2$ (si on ne le remarque pas, il suffit de compléter le carré de $-y^2 - 4xy$). On utilise le changement de variable $u = y + 2x$. On a $u' = y' + 2$ et on obtient

$$\begin{aligned} u' - 2 = \sqrt{-u^2+1} - 2 &\Leftrightarrow \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \int dx \\ &\Leftrightarrow \arcsin(u) = x + C \\ &\Leftrightarrow \arcsin(y+2x) = x + C. \end{aligned}$$

Exercice 5. Un gâteau est retiré du four à $100°C$. On le laisse refroidir dans une pièce de $21°C$. Après 30 minutes, le gâteau est à $60°C$. À quelle température le gâteau sera-t-il après une heure, sachant que la vitesse de refroidissement du gâteau est directement proportionnelle à la différence de température entre le gâteau et la pièce? On suppose que la température du gâteau est uniforme à tout moment et que la température de la pièce est constante pour modéliser le problème.

Exercice 6. Un vieil os trouvé sous terre possède un seizième du carbone-14 d'un os vivant. La vitesse de détérioration du carbone-14 dans un os mort est directement proportionnelle à la quantité de carbone dans l'os. La constante de proportionalité est environ $k = 0{,}0001216$ si le temps est mesuré en années. Déterminer à peu près l'âge de l'os.

Exercice 7. Le taux d'élimination d'un médicament dans le sang est directement proportionnelle à la quantité total de médicament dans le sang. Donner l'équation différentielle qui modélise ce système.

Exercice 8. La chute libre d'une personne est modélisée par

$$v'(t) = g - kv(t)^2,$$

où g et k sont des constantes positives et $v(t)$ est la vitesse au temps t. On pose $v_0 = \sqrt{\frac{g}{k}}$. La personne part d'une vitesse nulle au temps $t = 0$. Pour quelles valeurs de $g, k > 0$ cette personne atteindra-t-elle tôt ou tard la vitesse v_0? Que se passe-t-il si elle atteint cette vitesse? Que se passe-t-il si la vitesse initiale de la personne est plus grande que v_0?

Vous pouvez répondre à ces questions sans résoudre l'EDO.