

# Équations différentielles

## Série 2

### EDO d'ordre 1

**Exercice 1.** Vérifier que les équations suivantes sont une solution des EDO.

- a)  $y = \sqrt{x}$  est une solution de  $y' = \frac{1}{2y}$ , où  $x, y > 0$ .
- b)  $y = e^{x^2}$  est une solution de  $y' = 2xy$ .
- c)  $\varphi(x, y) = x^2 + 2y^3 = C$  est une solution de  $2x + 6y^2y' = 0$ .
- d)  $\varphi(x, y) = (x - \sin y)^2 = C$  est une solution de  $y' = \sec y$ .
- e)  $\log y + xy = C$  est solution de  $\left(\frac{1}{y} + x\right)y' + y = 0$ .

**Exercice 2.** Séparation de variables. Résoudre les EDO suivantes par la méthode de séparation de variables. Trouver également les solutions singulières.

- a)  $y' = \frac{x}{y+1}$
- b)  $x^2 + xyy' = 1$
- c)  $y' = xy + y + x + 1$

**Exercice 3.** Résoudre les EDO suivantes en utilisant le changement de variable  $u = \frac{y}{x}$ .

- a)  $y' = y + \frac{y}{x}$
- b)  $x^2y' = xy + y^2$
- c)  $y' = \frac{2y}{x-2y}$

**Exercice 4.** Résoudre les EDO suivantes en utilisant le changement de variable  $u = ax + by$ .

- a)  $y' = x(x + y) - 1$
- b)  $y' = \sqrt{-y^2 - 4xy - 4x^2 + 1} - 2$
- c)  $y' = \frac{3y + x}{3y - 3x}$

**Exercice 5.** Un gâteau est retiré du four à  $100^\circ\text{C}$ . On le laisse refroidir dans une pièce de  $21^\circ\text{C}$ . Après 30 minutes, le gâteau est à  $60^\circ\text{C}$ . À quelle température le gâteau sera-t-il après une heure, sachant que la vitesse de refroidissement du gâteau est directement proportionnelle à la différence de température entre le gâteau et la pièce? On suppose que la température du gâteau est uniforme à tout moment et que la température de la pièce est constante pour modéliser le problème.

**Exercice 6.** Un vieil os trouvé sous terre possède un seizième du carbone-14 d'un os vivant. La vitesse de détérioration du carbone-14 dans un os mort est directement proportionnelle à la quantité de carbone dans l'os. La constante de proportionnalité est environ  $k = 0,0001216$  si le temps est mesuré en années. Déterminer à peu près l'âge de l'os.

**Exercice 7.** Le taux d'élimination d'un médicament dans le sang est directement proportionnelle à la quantité total de médicament dans le sang. Donner l'équation différentielle qui modélise ce système.

**Exercice 8.** La chute libre d'une personne est modélisée par

$$v'(t) = g - kv(t)^2,$$

où  $g$  et  $k$  sont des constantes positives et  $v(t)$  est la vitesse au temps  $t$ . On pose  $v_0 = \sqrt{\frac{g}{k}}$ . La personne part d'une vitesse nulle au temps  $t = 0$ . Pour quelles valeurs de  $g, k > 0$  cette personne atteindra-t-elle tôt ou tard la vitesse  $v_0$ ? Que se passe-t-il si elle atteint cette vitesse? Que se passe-t-il si la vitesse initiale de la personne est plus grande que  $v_0$ ?

Vous pouvez répondre à ces questions sans résoudre l'EDO.