Équations différentielles

Série 1

Rappels de calcul 1 et d'algèbre linéaire

Exercice 1. Déterminer le domaine de $\mathbb{R}^2$ sur lequel les fonctions suivantes sont de classe C^1.

a) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ c) $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ \sqrt{x^2+y^2} \\ x-y+2 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Calculer la différentielle des fonctions suivantes.

a) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} xyz \\ x^2+y^2 \end{pmatrix}$ b) $f \circ g(t)$, où $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2y \\ 1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ et $g(t) = \begin{pmatrix} \log t \\ t^2 - t \end{pmatrix}$

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ et $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ deux fonctions de classe C^1. Donner l'expression la plus explicite possible de

a) $\dfrac{\partial}{\partial x} g \circ f(x,y)$ b) $\dfrac{\partial}{\partial y} g \circ f(x,y)$ c) $\mathrm{d}(g \circ f)$

.

Exercice 4. Dessiner quelques courbes de niveau des expressions suivantes.

a) $x^2 + y^2 = C$ b) $y = Cx$ c) $x^4 + y^4 = C$

Exercice 5. Calculer l'expression de la pente de la tangente des courbes de niveau suivantes. Dessiner quelques courbes de niveau et représenter les tangentes en quelques points.

a) Les cercles de rayon r centrés en $(1,0)$ b) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = C^2$

Exercice 6. Calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne à l'origine des fonctions suivantes.

a) $f(x,y) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{x+1} + xy - 3y \\ -\log(x+1) + y(x+2) \end{pmatrix}$ b) $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 + 2x + 3y^2 - 4y - 6z \\ 10 + x - x^2 + xy + 6y + 3z \\ xyz + x - 2y - 3z \end{pmatrix}$

Exercice 7. Si possible, diagonaliser les matrices de l'exercice précédent en trouvant la matrice de passage. (Il n'est pas nécessaire de calculer l'inverse de la matrice de passage.)

Exercice 8. Vrai ou faux. Justifier. Soit A une matrice réelle carré $n \times n$.

a) Si A est symétrique, alors A est diagonalisable.

b) Si A est diagonalisable, alors il existe un changement de base P tel que PAP^{-1} est symétrique.

c) Si A est diagonalisable, alors A^T est diagonalisable, où A^T est la matrice transposée.

d) La matrice A est diagonalisable si et seulement si la dimension géométrique est égale à la dimension algébrique pour chaque valeur propre.

Exercices supplémentaires
Cette section est optionnelle.

Exercice 9. Bloc de Jordan. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que A possède une seule valeur propre λ. Trouver sa valeur et montrer que sa dimension géométrique est 1. Trouver un vecteur propre associé $\vec{v}$.

b) Trouver $\vec{w}$, solution de l'équation

$$(A - \lambda I)\vec{w} = \vec{v}.$$

c) Trouver $\vec{x}$, solution de l'équation

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{w}.$$

d) Soit $P = (\vec{v} \quad \vec{w} \quad \vec{x})$. Vérifier que P est inversible et calculer $B = P^{-1}AP$.

La matrice B est appelé un *bloc de Jordan*. En général, un bloc de Jordan a la forme

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda & & & & 0 & \\ & & \ddots & 0 & & & \\ & & & \lambda & 1 & & \\ & & & & \lambda & & \\ & & 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Forme normale de Jordan. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Elle est dite *sous forme normale de Jordan*, car sur sa diagonale, on ne retrouve que des blocs de Jordan.

a) Quelles sont les valeurs propres de A? Quelle est la dimension algébrique de chaque valeur propre?

b) Quelle est la dimension géométrique de chaque valeur propre?

c) Soit B une autre matrice ayant les mêmes valeurs propres que A avec les mêmes dimensions géométriques et algébriques. Expliquer comment trouver une matrice de passage P telle que $A = PBP^{-1}$. (Inspirez-vous du numéro précédent.)

Exercice 11. Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & -4 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 6 & -3 & -2 & -3 \\ 6 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cette matrice sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$. Elles ont toutes deux une dimension algébrique de 2. La dimension géométrique de λ_1 est 2 et celle de λ_2, 1.

a) Sans faire de calcul, déterminer si la matrice A est diagonalisable.

b) Donner une expression possible d'une forme normale de Jordan de A.

c) Sans faire les calules, expliquer comment trouver une matrice de passage vers la forme normale de Jordan donner en a).