Équations différentielles

Série 10 (solutionnaire partiel)

Exercice 1. Vrai ou faux. Soit $y' = f(y)$ une EDO, où f est de classe C^1. Si x_0 et y_0 sont deux états très près dans le portrait de phases, alors leur évolution temporel restera très près.

Solution. Faux. Si x_0 et y_0 sont près, alors il est vrai que $\Phi(t, x_0)$ et $\Phi(t, x_0)$ sont près *pour t petit*. Lorsque t devient grand, il n'y a aucune raison que les solutions restent proches.

Par exemple, $Y_1 = x_0 e^t$ et $Y_2 = y_0 e^t$ sont les solutions respectives de

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = x_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = y, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si $x_0 = -\varepsilon$ et $y_0 = \varepsilon$, alors x_0 et y_0 peuvent être arbitrairement proche, mais $Y_1(t) \to -\infty$ et $Y_2(t) \to \infty$ lorsque $t \to \infty$.

Exercice 2. Soit l'EDO

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2, \\ y' = 2xy. \end{cases}$$

a) Le linéarisé donne-t-il de l'information sur le portrait de phases?

b) Trouver une intégrale première en résolvant une EDO de la forme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$.

c) Tracer le portrait de phases.
Rappel. En complétant le carré de $x^2 + y^2 + ay = 0$, on trouve l'équation d'un cercle centré en $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ de rayon $\frac{a}{2}$: $x^2 + \left(y^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$.

d)† Calculer l'indice de $(0, 0)$. (Référez-vous au devoir 3 au besoin.)

Solution.

a) Le linéarisé en $(0, 0)$ est $Y' = 0$, donc il ne donne aucune information sur le portrait de phase.

b) On a

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x^2 - y^2}{2xy} = \frac{x}{2y} - \frac{y}{2x}.$$

On utilise le changement de variable $u(y) = \frac{x}{y}$. En dérivant par rapport à y, on obtient $u + yu' = x'$. Ainsi, on a

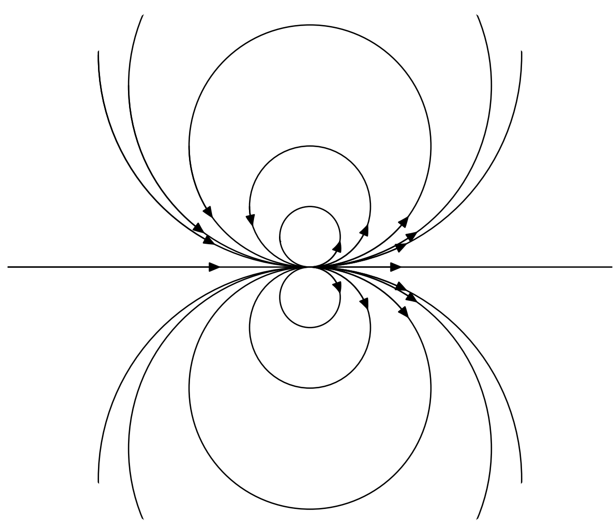
$$u + yu' = \frac{u}{2} - \frac{1}{2u} \quad \Leftrightarrow \quad yu' = -\frac{u}{2} - \frac{1}{2u}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad yu' = -\frac{u^2+1}{2u} \\
&\Leftrightarrow \quad \int \frac{2u}{u^2+1}\mathrm{d}u = -\int \frac{\mathrm{d}y}{y} \\
&\Leftrightarrow \quad \log(u^2+1) = -\log|y| + C \\
&\Leftrightarrow \quad u^2+1 = \frac{D}{y} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{y^2}+1 = \frac{D}{y}.
\end{aligned}
$$

Notre intégrale première est donc $h(x,y) = \frac{x^2}{y} + y$.

c) Le portrait de phases est un peu plus délicat que ce que nous avons vu jusqu'à maintenant. (La raison étant que le point singulier est double.)

Les courbes de niveau de l'intégrale première ont la forme $\frac{x^2}{y} + y = a$, où $a \in \mathbb{R}$. En multipliant l'équation par y et en complétant le carré en y, on trouve $x^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$. Ainsi, le portrait de phases est formé de cercle dont le centre est sur l'axe des y et qui est toujours tangent à l'axe des x.



d) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to [0, 2\pi)$ la fonction qui donne l'angle, définie comme dans le devoir 3. Soit V le champ de vecteurs de l'EDO. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f \circ V)(\cos\theta, \sin\theta) = \nabla f\big(V(\cos\theta, \sin\theta)\big) dV(\cos\theta, \sin\theta) \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

D'une part, on a

$$dV = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}\Bigg|_{(\cos\theta, \sin\theta)} = \begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on a

$$\nabla f\big(V(\cos\theta,\sin\theta)\big) = \big(-2\cos\theta\sin\theta, \cos^2\theta - \sin^2\theta\big).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f\circ V)(\cos\theta,\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\qquad = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \big(-2\cos\theta\sin\theta, \cos^2\theta-\sin^2\theta\big)\begin{pmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}\mathrm{d}\theta \\
&\qquad = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \big(-2\cos\theta\sin\theta, \cos^2\theta-\sin^2\theta\big)\begin{pmatrix} -2\sin\theta\cos\theta \\ \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{pmatrix}\mathrm{d}\theta \\
&\qquad = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (4\sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\qquad = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2\mathrm{d}\theta \\
&\qquad = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} 1^2\mathrm{d}\theta = 2.
\end{aligned}$$

Remarque. Le calcul est très simple avec les intégrales complexes : l'EDO est $z' = z^2$, donc on pose $g(z) = z^2$ et l'indice est donné par

$$\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{2z}{z^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{i\pi}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{2i\pi}{i\pi} = 2,$$

où γ est une courbe fermée simple autour de 0 et orienté dans le sens positif.

Exercice 3. Soit ε un petit paramètre. On considère l'EDO

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - \varepsilon, \\ y' = 2xy. \end{cases}$$

a) On suppose $\varepsilon > 0$.
  - *i)* Déterminer les points singuliers du système et calculer le linéarisé.
  - *ii)* Tracer le portrait de phases à partir des linéarisés. Expliquer comment le 2c) permet de conclure que le portrait de phases est réellement celui tracer.

b) Refaire le b) avec $\varepsilon < 0$.

Solution. a) *i)* Les points singuliers sont en $(\pm\sqrt{\varepsilon}, 0)$. On pose et on calcule

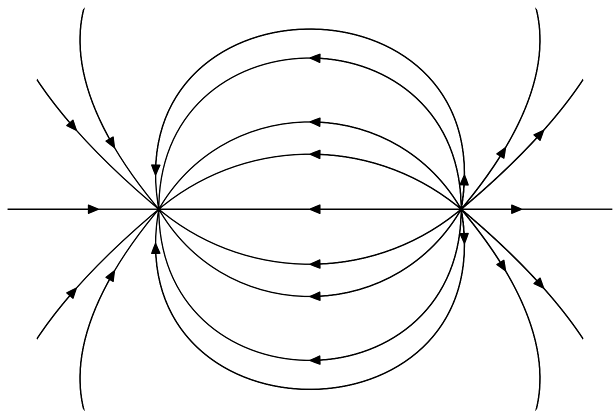
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - \varepsilon \\ 2xy \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{d}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a

$$\mathrm{d}f(\sqrt{\varepsilon},0) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\varepsilon}\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}f(-\sqrt{\varepsilon},0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\varepsilon} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{\varepsilon}\end{pmatrix}.$$

Le linéarisé en $(\sqrt{\varepsilon}, 0)$ est un nœud instable et celui en $(-\sqrt{\varepsilon}, 0)$ est un nœud stable.

ii) Un peu à droite de l'origine, on a un nœud instable. Toutes les orbites, sauf une, quitte le nœud se dirige vers le nœud stable qui est un peu à gauche de l'origine. On sait que le portrait de phases doit être celui-là, puisque le flot Φ est continue en (t, x, y, ε). Comme ε est petit, le flot $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot, \varepsilon)$ est proche de $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot, 0)$, qui est le flot du 2c).



Exercice 4. Soit ε un petit paramètre. On considère l'EDO

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2, \\ y' = 2xy - \varepsilon. \end{cases}$$

Tracer le portrait de phases pour les cas $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < 0$ à l'aide des linéarisés. Utiliser le 2c) pour expliquer pourquoi le portrait de phases dessiné est exact.

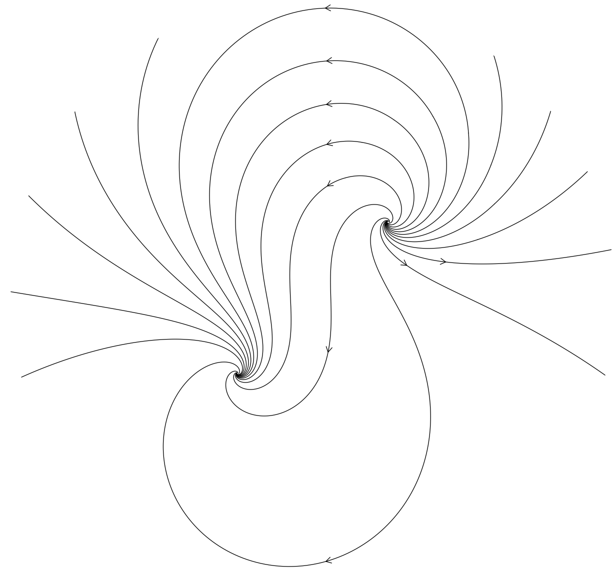
Solution. On fait le cas $\varepsilon > 0$. Il y a deux points singuliers : $P_1 := (-\sqrt{\varepsilon/2}, -\sqrt{\varepsilon/2})$ et $P_2 := (\sqrt{\varepsilon/2}, \sqrt{\varepsilon/2})$. On pose et on calcule

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x' = x^2 - y^2, \\ y' = 2xy - \varepsilon \end{pmatrix} \qquad \mathrm{d}f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a

$$f(-\sqrt{\varepsilon/2}, -\sqrt{\varepsilon/2}) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} & 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \\ -2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} & -2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(\sqrt{\varepsilon/2}, \sqrt{\varepsilon/2}) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} & -2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \\ 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} & 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, dans les deux cas, ce sont des foyers. Il est stable en P_1 et instable en P_2.



Le portrait de phases tracé est exact, puisque le flot dépend de façon continue en ε. Ainsi, $\Phi(t, x, y, \varepsilon)$ est proche de $\Phi(t, x, y, 0)$, pourvu que ε soit suffisamment petit. Autrement, si on regarde notre portrait de phases « de loin », il serait difficile de le discerner du portrait de phases obtenu au 2c).

Le cas pour $\varepsilon < 0$ est semblable.

Exercice 5. Soit l'EDO $x'' = x + \varepsilon$, où ε est un paramètre.

a) Appliquer la méthode des équations aux variations pour trouver une solution approchée de la forme $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon y_0 + \varepsilon^2 R(\varepsilon, t)$, où R est un reste.

b) Résoudre directement l'EDO.
Indice. Remarquez que $x(t) = -\varepsilon$ est une solution particulière de l'EDO.

Solution. a) En $\varepsilon = 0$, on trouve la solution de $x_0'' = x_0$, qui est simplement $x_0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$.

Soit x_ε, la solution de l'EDO pour ε. On a vu en classe que x_ε est de classe C^∞ en ε si l'EDO est C^∞ en ε, ce qui est le cas, donc on peut utiliser la formule de Taylor. On a

$$x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon y_0 + \varepsilon^2 R(\varepsilon, t),$$

où $y_0 := \left.\frac{\partial x_\varepsilon}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$ et R est un reste qui borné. On dérive cette équation deux fois et on la remplace dans l'EDO :

$$\begin{aligned} x_0'' + \varepsilon y_0'' + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 R}{\partial t^2}(\varepsilon, t) &= x_\varepsilon + \varepsilon \\ &= \varepsilon + x_0 + \varepsilon y_0 + \varepsilon^2 R(\varepsilon). \end{aligned}$$

Si on égalise les puissances en ε, on trouve l'équation $y_0'' = 1 + y_0$. C'est une EDO linéaire inhomogène. On la résout et on trouve $y_0 = D_1 e^t + D_2 e^{-1} - 1$. De plus, y_0 doit vérifier les conditions initiales $y_(0) = 0$ et $y_0'(0) = 0$, donc on trouve $y_0(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - 1$.

On conclut que $x_\varepsilon = C_1e^t + C_2e^{-t} + \varepsilon\big(\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - 1\big)\varepsilon R(\varepsilon, t)$.

Exercice 6. Répéter l'exercice précédent avec l'EDO $x'' = x + \varepsilon x'$.
Indice. Il est possible que vous ayez à trouver une solution particulière de la forme $Ate^t + Bte^{-t}$.

Exercice 7. Soit une EDO $y' = f(y, \varepsilon)$ où ε est un paramètre et dont le plan de phases est $\mathbb{R}^2$. On suppose que $y = 0$ est un point singulier pour tout ε. Si en $\varepsilon = 0$, le point d'équilibre $y = 0$ est un centre ou un foyer faible, expliquer pourquoi $y = 0$ ne peut pas être un col pour ε assez petit.

Solution. Soit Φ le flot de $y' = f(y, \varepsilon)$. On a vu en classe que si f est de classe C^1, alors Φ l'est aussi. En particulier, Φ dépend continûment de ε. Ainsi, si $\varepsilon = 0$, le point $y = 0$ est un centre ou un foyer faible, alors il faut que $\Phi(t, y, \varepsilon)$ ressemble à un foyer si ε est assez petit. Or, un col est complètement différent d'un centre ou d'un foyer, donc il est impossible que $y = 0$ soit un col pour ε suffisamment petit.

Exercice 8. Calculer l'ensemble ω-limite des points suivants de l'EDO

$$\begin{cases} x' = y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

a) $(0, 0)$ b) $\big(\frac{1}{2}, 0\big)$ c) $(2, 0)$ d) $(1, 0)$

Remarque. Il est suffisant de dessiner le portrait de phases et d'indiquer l'ensemble ω-limite sur celui-ci sans trop justifier rigoureusement.

Solution. a) $\{(0, 0)\}$, b), c), d) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Exercice supplémentaire

Cette section est optionnelle.

Exercice 9. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction localement Lipschitz. Soit l'EDO $y' = f(y)$ et Φ son flot. On a montré le théorème de distance entre les solutions en classe. Un corollaire important est le fait que Φ est continue. Montrer ce corollaire à l'aide des étapes suivantes.

a) Soit $K \subseteq U$ un compact. Montrer que pour tout $y_0 \in K$, il existe $r_{y_0} > 0$ tel que Φ est continue en tout point $(t, y) \in B\big((0, y), r_{y_0}\big) \subseteq \mathbb{R} \times K$.
Remarque. On tient pour acquis que pour tout $y \in U$, il existe $r > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in B(y, r)$, l'intervalle de définition I de $\Phi(\cdot, y)$ contient $[-\delta, \delta]$. Cela se voit dans la démonstration du théorème d'existence et d'unicité.

b) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que Φ est continue sur $[-r, r] \times K$.

c) Pour $y \in U$, soit $I_y \subseteq \mathbb{R}$ le domaine de définition de $\Phi(\cdot, y)$. Déduire que Φ est continue sur $\bigcup_{y \in K} I_y \times \{y\}$.

d) Montrer que Φ est continue sur son domaine.