Équations différentielles

Série 10

Exercice 1. Vrai ou faux. Soit $y' = f(y)$ une EDO, où f est de classe C^1. Si x_0 et y_0 sont deux états très près dans le portrait de phases, alors leur évolution temporel restera très près.

Exercice 2. Soit l'EDO

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2, \\ y' = 2xy. \end{cases}$$

a) Le linéarisé donne-t-il de l'information sur le portrait de phases?

b) Trouver une intégrale première en résolvant une EDO de la forme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$.

c) Tracer le portrait de phases.
Rappel. En complétant le carré de $x^2 + y^2 + ay = 0$, on trouve l'équation d'un cercle centré en $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ de rayon $\frac{a}{2}$: $x^2 + \left(y^2 + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$.

d)† Calculer l'indice de $(0, 0)$. (Référez-vous au devoir 3 au besoin.)

Exercice 3. Soit ε un petit paramètre. On considère l'EDO

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 - \varepsilon, \\ y' = 2xy. \end{cases}$$

a) On suppose $\varepsilon > 0$.

i) Déterminer les points singuliers du système et calculer le linéarisé.

ii) Tracer le portrait de phases à partir des linéarisés. Expliquer comment le 2c) permet de conclure que le portrait de phases est réellement celui tracer.

b) Refaire le b) avec $\varepsilon < 0$.

Exercice 4. Soit ε un petit paramètre. On considère l'EDO

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2, \\ y' = 2xy - \varepsilon. \end{cases}$$

Tracer le portrait de phases pour les cas $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < 0$ à l'aide des linéarisés. Utiliser le 2c) pour expliquer pourquoi le portrait de phases dessiné est exact.

Exercice 5. Soit l'EDO $x'' = x + \varepsilon$, où ε est un paramètre.

a) Appliquer la méthode des équations aux variations pour trouver une solution approchée de la forme $x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon y_0 + \varepsilon^2 R(\varepsilon, t)$, où R est un reste.

b) Résoudre directement l'EDO.
Indice. Remarquez que $x(t) = -\varepsilon$ est une solution particulière de l'EDO.

Exercice 6. Répéter l'exercice précédent avec l'EDO $x'' = x + \varepsilon x'$.
Indice. Il est possible que vous ayez à trouver une solution particulière de la forme $Ate^t + Bte^{-t}$.

Exercice 7. Soit une EDO $y' = f(y, \varepsilon)$ où ε est un paramètre et dont le plan de phases est $\mathbb{R}^2$. On suppose que $y = 0$ est un point singulier pour tout ε. Si en $\varepsilon = 0$, le point d'équilibre $y = 0$ est un centre ou un foyer faible, expliquer pourquoi $y = 0$ ne peut pas être un col pour ε assez petit.

Exercice 8. Calculer l'ensemble ω-limite des points suivants de l'EDO

$$\begin{cases} x' = y + x(1 - x^2 - y^2), \\ y' = -x + y(1 - x^2 - y^2). \end{cases}$$

a) $(0, 0)$ b) $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ c) $(2, 0)$ d) $(1, 0)$

Remarque. Il est suffisant de dessiner le portrait de phases et d'indiquer l'ensemble ω-limite sur celui-ci sans trop justifier rigoureusement.

Exercice supplémentaire

Cette section est optionnelle.

Exercice 9. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f \colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction localement Lipschitz. Soit l'EDO $y' = f(y)$ et Φ son flot. On a montré le théorème de distance entre les solutions en classe. Un corollaire important est le fait que Φ est continue. Montrer ce corollaire à l'aide des étapes suivantes.

a) Soit $K \subseteq U$ un compact. Montrer que pour tout $y_0 \in K$, il existe $r_{y_0} > 0$ tel que Φ est continue en tout point $(t, y) \in B\big((0, y), r_{y_0}\big) \subseteq \mathbb{R} \times K$.
Remarque. On tient pour acquis que pour tout $y \in U$, il existe $r > 0$ et $\delta > 0$ tel que pour tout $y \in B(y, r)$, l'intervalle de définition I de $\Phi(\cdot, y)$ contient $[-\delta, \delta]$. Cela se voit dans la démonstration du théorème d'existence et d'unicité.

b) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que Φ est continue sur $[-r, r] \times K$.

c) Pour $y \in U$, soit $I_y \subseteq \mathbb{R}$ le domaine de définition de $\Phi(\cdot, y)$. Déduire que Φ est continue sur $\bigcup_{y \in K} I_y \times \{y\}$.

d) Montrer que Φ est continue sur son domaine.