Équations différentielles

Révision

Ces exercices servent à vous aider à vous préparer, mais ils ne remplacent pas les séries d'exercices. Ainsi, cette liste ne prétend pas couvrir chaque recoin de la matière.

Exercice 1. Résoudre les EDO.

a) $x(x+y)y' = y(x-y)$ b) $yy'' = 3(y')^2$ c) $y' + 3y = 2x^5$

d) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ e) $y'' - y' - 2y = 3x + 4$ f) $y'' + 9y = 2x^2e^{3x} + 5$

g) $xy' + (2x-3)y = 4x^4$ h) $9y''' + 12y'' + 4y' = 0$ i) $xe^y y' = 2(e^y + x^3e^{2x})$

j) $y'' + 16y = e^{3x}$ k) $2\sqrt{x}y' = \sqrt{1-y^2}$ l) $yy' + x = \sqrt{x^2+y^2}$

m) $\begin{cases} x' = 8y \\ y' = -2x \end{cases}$ n) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$ o) $y' = 2x\sec y$

p) $xy'' = y'$ q) $x^2y'' + 3xy' = 2$ r) $y' + 1 = 2y$

s) $5y^{(4)} + 3y''' = 0$ t) $y^3y'' = 1$ u) $(2x+3y) + (3x+2y)y' = 0$

v) $y' + 2xy = 0$ w) $y'' + 6y' + 13y = 0$ x) $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = 2y \end{cases}$

y) $(\cos x + \log y) + (\frac{x}{y} + e^y)y' = 0$

Solution. a) Changement de variable $u = \frac{y}{x}$. Rép. $-\frac{x}{y} + \log\left|\frac{y}{x}\right| = -2\log|x| + C$

b) Changement de variable $z(y(x)) = y'(x)$. Rép. $-\frac{1}{2y^2} = Cx + D$

d) Résoudre $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$. Rép. $x(t) = C_1 \sin t$, $y(t) = C_2 \cos t$.

g) EDO linéaire. Rép. $y = Cx^3e^{-2x} + 2x^3$

h) EDO linéaire à coefficients constants. Rép. $y = C_1 + C_2e^{\frac{-2x}{3}} + C_3xe^{\frac{-2x}{3}}$

i) Facteur intégrant $\mu(x) = \frac{1}{x^3}$. Rép. $\varphi(x,y) = \frac{e^y}{x^2} - e^{2x} = C$

k) Variables séparables. Rép. $\arcsin(y) = \sqrt{x} + C$

l) Changement de varialbe $u = x^2 + y^2$. Rép. $\sqrt{x^2+y^2} = x + C$

n) Facteur intégrant $\mu(y) = \frac{1}{y^2}$. Rép. $\varphi(x,y) = -\frac{x^2}{y} + y = C$

q) Changement de variable $z = y'$. Rép. $y = C_1 + \frac{C_2}{x^2} + \log x$

u) Équation exacte. Rép. $\varphi(x,y) = 3xy + y^2 + x^3 = C$

x) Résoudre la deuxième équation et remplacer dans la première. Rép. $x(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$ et $y(t) = C_2e^{2t}$

Exercice 2. Calculer la longueur des courbes suivantes.

a) $\begin{cases} x(t) = t - \cosh t \sinh t \\ y(t) = 4 \sinh t \end{cases}$ $t \in [0, 1]$ b) $\begin{cases} x(t) = (1 + \cos t) \cos t \\ y(t) = (1 + \cos t) \sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$

Solution. a) On a

$$x'(t) = 1 - \sinh^2 t - \cosh^2 t = 2 - 2\cosh^2 t \qquad \text{et} \qquad y'(t) = 4\cosh t.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2 &= (4 - 4\cosh^2 t + 4\cosh^4 t) + 8\cosh^2 t \\ &= 4 + 4\cosh^2 t + 4\cosh^4 t \\ &= \big(2 + 2\cosh^2 t\big)^2.\end{aligned}$$

On trouve enfin

$$\begin{aligned}L &= \int_0^1 \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sqrt{\big(2 + 2\cosh^2 t\big)^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (2 + \cosh^2 t)\mathrm{d}t \\ &= 2 + \frac{1}{2}\big(1 + \sinh(1)\cosh(1)\big).\end{aligned}$$

Exercice 3. Un objet est en chute libre. On suppose que la gravité est constante et que la résistence de l'air est directement proportionnelle à la vitesse. Trouver l'EDO qui modélise ce mouvement et la résoudre.

Solution. L'EDO est $y'' + ay' + b = 0$, où $y'' \geq 0$ est l'accélération, $a > 0$ car $y' \geq 0$ et $b < 0$, car la gravité tire vers le bas.

On a le polynôme associé $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda$. On voit que les racines sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = -a$. La solution homogène est

$$y_h = C_1 + C_2e^{-ax}.$$

Ensuite, par la méthode des coefficients indéterminées, on vérifie si $y_p = C$ est linéairement indépendante de y_h. On voit que non, donc on prend $y_p = Ax + B$. On rempalce dans l'EDO :

$$0 + a(A) + b = 0.$$

On a donc $A = -\frac{b}{a}$ et la constante B se fait absorber dans C_1. On a donc

$$y = C_1 + C_2 e^{-ax} - \frac{b}{a} x.$$

Exercice 4. Un réservoir d'un volume de 100 litres se remplit à un débit de 10 litres par minute d'une solution d'eau salée à 3 grammes de sel par litre. Il y a 8 litres par minute de liquide qui s'écoulent du réservoir. Au début de l'expérience, le réservoir est rempli à 30 litres en eau contenant 30 grammes de sel dissous. On suppose que le sel se mélange instantanément uniformément. Modéliser la quantité de sel dans le réservoir au temps t et trouver combien de sel contiendra le réservoir au moment dès qu'il sera plein.

Exercice 5. Soit l'EDO $y'' = -y$. On définit S et C comme les solutions respectives des problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} y'' = -y, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} y'' = -y, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Ne pas résoudre l'EDO. (On sait que les solutions sont $\sin x$ et $\cos x$. Pour l'exercice, on prétend ne pas connaître ces fonctions.)

a) Montrer que $S'(x) = C(x)$ et que $C'(x) = -S(x)$.

b) Montrer que $S(x)^2 + C(x)^2 = 1$.

c) Montrer que $S(a+b) = S(a)C(b) + C(a)S(b)$.

Solution. a) On pose $f(x) = S'(x)$. On voit que $f'(x) = S''(x) = S(x)$ et donc on a $f''(x) = -f(x)$. De plus, on a $f(0) = S'(0) = 1$ et $f'(0) = -S(0) = 0$. Ainsi, f est une solution du deuxième problème de Cauchy. Comme la solution est unique, on a $S'(x) = C(x)$. On montre que $C'(x) = -S(x)$ de la même façon.

b) On dérive :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(S^2(x) + C^2(x)) = 2S(x)C(x) - 2C(x)S(x) = 0,$$

l'équation est donc constante. Puisque $S(0) = 0$ et $C(0) = 1$, on trouve que $C^2(0) + S^2(0) = 1$, d'où l'identité.

c) On fixe a. On pose $g(x) = S(a+x)$ et $h(x) = S(a)C(x) + C(a)S(x)$. On peut vérifier par calcul direct que $g''(x) = -g(x)$ et $h''(x) = -h(x)$. De plus, on a que $g(0) = h(0)$ et $g'(0) = h'(0)$. Comme g et h sont solutions du même problème de Cauchy, on doit avoir $g(x) = h(x)$. On obtient l'identité en posant $x = b$.

Exercice 6. Soit l'EDO $y'' = y^2$.

a) Expliquer pourquoi l'EDO est équivalente au système

$$(\dagger) \qquad \begin{cases} u' = v, \\ v' = u^2. \end{cases}$$

b) Soit $h(u,v) = 2u^3 - 3v^2$. Montrer que les courbes de niveau de h suivent les courbes solutions de $(\dagger)$.

Exercice 7. On considère un condensateur et une résistance en circuit. Au temps $t = 0$, le condensateur porte une charge Q. La différence de potentiel entre ses bornes est de V. Il existe une constante C (propre à ce condensateur), appelée capacité, telle que

$$Q = CV.$$

Lorsque le temps s'écoule, le condensateur se décharge, ce qui produit un courant qui passe par le dipôle résistant. Soit $q(t)$ la charge restante dans le condensateur au temps t et $v(t)$ la différence de potentiel entre les bornes au temps t. On a toujours

$$q(t) = Cv(t).$$

Le courant dans le circuit est le taux de variation de la charge, donc

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -i(t).$$

Si le dipôle résistant possède une résistance de R, la loi d'Ohm affirme que

$$i = \frac{v}{R}.$$

Trouver une expression pour q et v et exprimer les constantes éventuelles en terme de Q, V et I, où $I := i(0)$.

Solution. En combinant, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{v}{R} = -\frac{q}{CR}.$$

La solution est $q(t) = De^{-\frac{t}{CR}}$, où D est une constante. Puisque $q(0) = Q$, on a $D = Q$. Comme $q(t) = Cv(t)$, on trouve $v(t) = \frac{Q}{C}e^{-\frac{t}{CR}} = Ve^{-\frac{t}{CR}}$.

Enfin, on peut exprimer C par $\frac{Q}{V}$ et $R = \frac{V}{I}$.

Exercice 8. On considère un fil conducteur semi-infini, modélisée par $[0, \infty)$. Une source de chaleur se trouve en $x = 0$. On suppose que le régime permanent est atteint (ainsi, la tempature $T(x)$ en x ne varie plus avec le temps, mais la chaleur continue de se propager).

La quantité de chaleur $Q(x)$ qui traverse le points x est directement proportionnel au taux de variation de la température. La quantité de chaleur perdue dans l'air* est $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}$ et est directement proportionnelle à la température au point x. Modéliser la température par une EDO d'ordre 2. Indiquer le signe de chaque constante.

Solution. D'une part, on a $Q(x) = AT'(x)$. Puisque $T'(x) \leq 0$ (la température diminue lorsque l'on s'éloigne de la source) et que $Q(x) \geq 0$, on a $A \leq 0$.

Ensuite, on a $Q'(x) = BT(x)$. Puisque $Q'(x) \leq 0$ (en effet, plus on s'éloinge de la source, plus $Q(x)$ est petit) et que $T(x) \geq 0$, on a $B \leq 0$. Ainsi, en dérivant la première équation, on trouve

$$AT''(x) = BT(x).$$

Autrement dit, on a $AT''(x) - BT(x) = 0$, $A \leq 0$ et $B \leq 0$.

Exercice 9. Soit $a(t)$ le capital que l'on possède au temps t et soit r l'intérêt annuel. On suppose que l'intérêt est payé de manière continue et est placé aussitôt avec le capital. Au moment $t + \Delta t$, on possède un capital de $a + \Delta a$. Ainsi, Δa représente l'intérêt de $a(t)$ pendant Δt. Donner une EDO qui modélise le capital a, sachant que pour Δt infinitésimal, l'intérêt correspond à $ra\Delta t$. Quel capital doit-on placer au temps $t = 0$ pour faire un profit de 1000$ après un an si le taux d'intérêt est $r = 4\%$?

* Pour voir cela, on remarque que $\Delta Q = Q(x + \Delta x) - Q(x)$ est la chaleur perdue entre x et $x + \Delta x$. En effet, si on ne perdait pas de chaleur, alors $Q(x)$ serait constante.