Équations différentielles

Révision

Ces exercices servent à vous aider à vous préparer, mais ils ne remplacent pas les séries d'exercices. Ainsi, cette liste ne prétend pas couvrir chaque recoin de la matière.

Exercice 1. Tracer une esquisse du portrait de phases des EDO suivantes. Justifier que cette esquisse représente le vrai portrait de phases. *Remarque* : faites-le d'abord à la main, puisqu'à l'examen vous n'aurez pas l'assistance d'un ordinateur.

a) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y$

b) $Y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y$

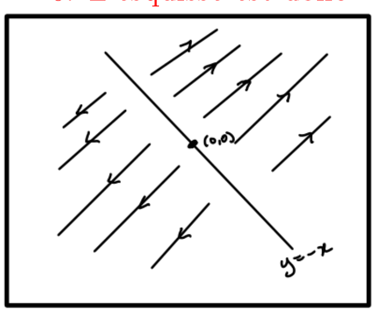
c) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x^2 + xy \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 3x^2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = y + x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \\ y' = -x + y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \end{cases}$

f) $\begin{cases} x' = y^2 - 1 \\ y' = x \end{cases}$

Solution. a) C'est une EDO linéaire, donc il suffit de trouver les valeurs propres et, si elles sont réelles, les vecteurs propres éventuels. Un petit calcul montre que les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 2$ et les vecteurs propres associés sont $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Puisque 0 est une valeur propre, il n'y a pas de point singulier à l'origine, puisque la droite $y = -x$ est constitué de solutions de $AY = 0$. L'esquisse est donc



c) Pour tracer le portrait de phases, on aura besoin des linéarisés et d'une intégrale première. Si $x + y = 0$, alors on a $x(x + y) = 0$. Il suit que tous les points de la forme $(x, -x)$ sont un zéro du système. Le linéarisé en un tel point aura la forme

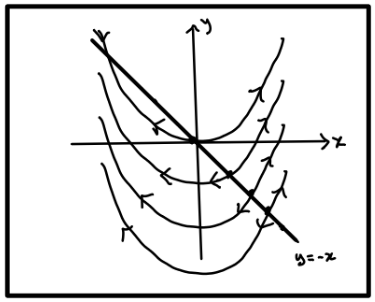
$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & x \end{pmatrix} Y.$$

On trouve que les valeurs propres sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1 + x$. Un vecteur propre associé à λ_1 est $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si $x \neq -1$, alors un vecteur prorpre associé à λ_2 est $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -x \end{pmatrix}$.

On trouve maintenant une intégrale première. On a

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2 + xy}{x + y} = \frac{x(x + y)}{x + y} = x.$$

Ainsi, on résout pour trouver $y = \frac{x^2}{2} + C$. L'intégrale première est $h(x, y) = y - \frac{x^2}{2}$. Ainsi, les orbites sont des paraboles dont le sommet est sur l'axe des y et qui pointent vers le haut. Elles intersectent la droite $y = -x$, là le champ de vecteurs est nul, et cela coupe les paraboles en plusieurs orbites, le cas échéant.



e) On note, d'abord, que le seul point singulier est à l'origine et que son linéarisé est un centre. Pour dessiner l'esquisse, on passe aux coordonnées polaires. On pose et on calcule

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = g(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g^{-1}(r, \theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$dg(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

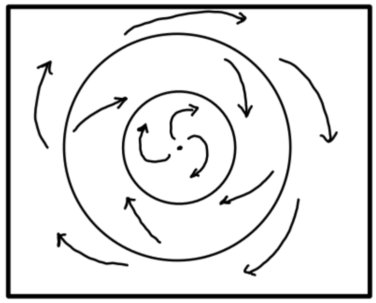
On calcule ensuite $(g_* f)\big(g(x, y)\big)$, où f est le champ de vecteurs de l'EDO. On a

$$\begin{aligned} (g_* f)\big(g(x, y)\big) &= dg(x, y) f(x, y) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y + x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \\ -x + y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(x^2+y^2)(1-x^2-y^2)(4-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-x^2-y^2}{x^2+y^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

L'EDO en coordonnées polaires est $\begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = (g_* f)(r, \theta)$. Ainsi, on substitue x par $\cos\theta$ et y par $r\sin\theta$. On obtient

$$\begin{cases} r' = r(1 - r^2)(4 - r^2), \\ \theta' = -1. \end{cases}$$

Maintenant, on peut voir que r est croissant sur $(0, 1)$, constant en 1, décroissant sur $(1, 2)$, constant en 2 et croissant sur $(2, \infty)$. Cela donne l'esquisse suivante



Exercice 2. Résoudre les EDO linéaires suivantes.

a) $Y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$ b) $Y' = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} Y$

c) $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} Y$ d) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} Y$

Solution. a) On rappelle que l'exponentielle d'une matrice en blocs sur la diagonale se calcule en calculant l'exponentielle de chaque bloc :

$$\exp \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^B \end{pmatrix},$$

où les 0 sont des matrices nulles de dimension appropriée. Dans notre cas, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et 0 est la matrice nulle 2×2. On obtient donc

$$\exp x \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}.$$

Chaque colonne de la matrice expentielle est une solution linéairement indépendante de l'EDO. On a donc la solution générale

$$Y(x) = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2x} \\ 0 \end{pmatrix} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

$$= (C_1 \cos x - C_2 \sin x) e_1 + (C_1 \sin x + C_2 \cos x) e_2 + C_3 e^{-2x} e_3 + C_4 e^x e_4.$$

b) La matrice a deux valeurs propres réelles $\lambda_1 = -7$ et $\lambda_2 = 5$. Ainsi, elle est diagonalisable et donc on sait comment trouver la solution générale. Les vecteurs propres associés sont $v_1 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il suit que la solution générale est

$$Y(x) = C_1 e^{-7x} v_1 + C_2 e^{5x} v_2.$$

Remarque. Je n'inclus pas mes calculs, mais à l'examen, il faut les faire.

d) La matrice a deux valeurs propres réelles : $\lambda_1 = -3$ simple et $\lambda_2 = 3$ double. On peut trouver deux vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

associé à λ_1 et λ_2 respectivement.

Ensuite, la façon la plus simple de terminer les calculs est trouver v_3 une solution de $(A - 3I)v_3 = v_2$. On a la matrice augmentée :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \overset{L_3 \leftarrow -2L_1 + L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ainsi, le système signifie que $-2u_1 + 2u_3 = 0$ et $u_3 = -1$, donc $u_1 = -1$. La variable u_2 est libre, donc on choisit $u_2 = 0$. Ainsi, le vecteur v_3 est $v_3 = (-1, 0, -1)^T$.

On pose $P = (\, v_1 \quad v_2 \quad v_3 \,)$ une matrice de passage. Avec ce choix de P, la théorie de l'algèbre linéaire nous dit que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: J.$$

La matrice exponentielle de Jx est connue, c'est

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^{-3x} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3x} & xe^{3x} \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix}.$$

En posant $Z = P^{-1}Y$, on obtient l'EDO $Z' = JZ$, dont la solution générale est

$$\begin{aligned} Z(x) &= C_1 \begin{pmatrix} e^{-3x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3x} \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ xe^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} \\ &= C_1 e^{-3x} e_1 + (C_2 e^{3x} + C_3 x e^{3x}) e_2 + C_3 e^{3x} e_3. \end{aligned}$$

Puisque $Y = PZ$ et que $Pe_j = v_j$, on conclut que

$$\begin{aligned} Y(x) &= C_1 e^{-3x} v_1 + (C_2 e^{3x} + C_3 x e^{3x}) v_2 + C_3 e^{3x} v_3 \\ &= C_1 e^{-3x} v_1 + C_2 e^{3x} v_2 + C_3 (x e^{3x} v_2 + e^{3x} v_3). \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $A \in \mathrm{Mat}(5 \times 5)$ une matrice qui possède les valeurs propres suivantes : $\lambda_1 = 1$ double, $\lambda_2 = 2$ simple, $\lambda_3 = 2 - i$ et $\lambda_4 = 2 + i$. La valeur propre λ_1 possède seulement un vecteur propre. Décrire la solution de $Y' = AY$ le plus explicitement possible.

Solution. Soit $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix}$ une matrice de passage, où les vecteurs v_j sont obtenus comme suit. Le vecteur v_1 est un vecteur propre de λ_1. Le vecteur v_2 est solution de l'équation $(A - I)v_2 = v_1$. Le vecteur v_3 un vecteur propre de λ_2. Pour v_4 et v_5, on considère d'abord u, w les vecteurs propres *complexes* de λ_3 et λ_4. On pose ensuite $v_4 = \frac{u+\overline{u}}{2} = \Re u$ et $v_5 = \frac{u-\overline{u}}{2i} = \Im u$.

Avec ce choix de P, on a

$$P^{-1}AP =: J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On sait résoudre le système $Z' = JZ$. La solution est donnée par la matrice exponentielle

$$e^{Jx} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2x}\cos x & -e^{2x}\sin x \\ 0 & 0 & 0 & e^{2x}\sin x & e^{2x}\cos x \end{pmatrix}.$$

On peut écrire la solution sous la forme

$$Z = C_1 e^x e_1 + C_2(xe^x e_1 + e^x e_2) + C_3 e^{2x} e_3 + e^{2x}\big((C_4\cos x - C_5 \sin x)e_4 + (C_5\cos x + C_4 \sin x)e_5\big).$$

Puisque $Y = PZ$ et que $Pe_j = v_j$, on obtient

$$Y = C_1 e^x v_1 + C_2(xe^x v_1 + e^x v_2) + C_3 e^{2x} v_3 + e^{2x}\big((C_4\cos x - C_5 \sin x)v_4 + (C_5\cos x + C_4 \sin x)v_5\big).$$

Exercice 4. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1.

a) Montrer que les deux EDO $y' = f(y)$ et $z' = \frac{f(z)}{1+\|f(z)\|^2}$ possèdent les mêmes intégrales premières.

b) Les deux EDO ont-elles nécessairement les mêmes solutions?

c) Quel est le lien entre les solutions des deux EDO?

Solution. a) Soit h une intégrale première de $y' = f(y)$. On a donc $\nabla h(y) \bullet f(y) = 0$. Il est clair que

$$\nabla h(y) \bullet \frac{f(y)}{1 + \|f(y)\|^2} = \frac{1}{1 + \|f(y)\|^2} \nabla h(y) \bullet f(y) = 0.$$

Ainsi, h est une intégrale première de $z' = \frac{f(z)}{1+\|f(z)\|^2}$. La réciproque se fait de la même façon.

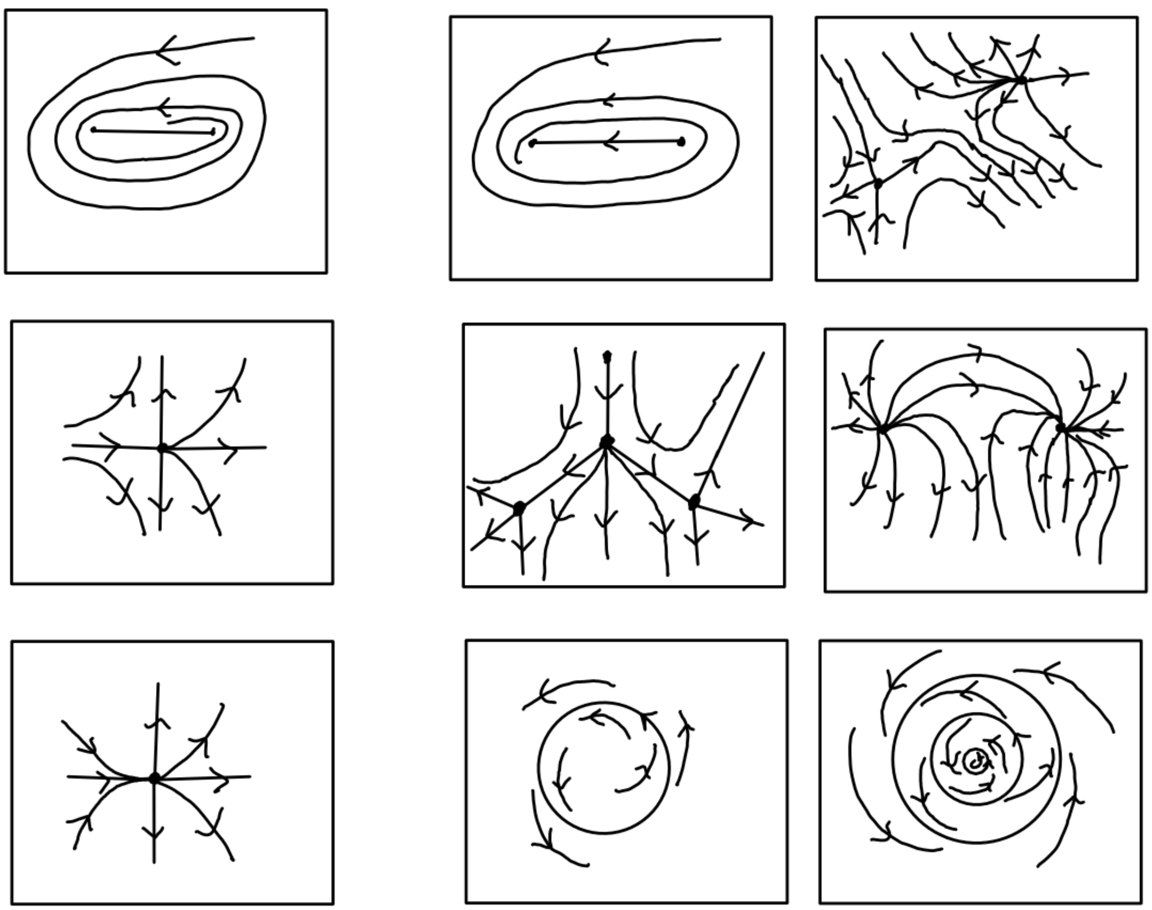
b) Non. Par exemple, si on prend $y' = y$, alors les solutions sont $y(x) = Ce^x$. Par contre, on peut voir que ces fonctions ne sont pas solutions de $z' = \frac{z}{1+z^2}$. En effet, on a d'une part $y'(x) = Ce^x$ et d'autre part

$$\frac{y(x)}{1+y(x)^2} = \frac{Ce^x}{1+Ce^{2x}} \neq Ce^x.$$

Il suit que les deux EDO n'ont pas les mêmes solutions.

c) Le lien entre les deux est qu'ils ont le même portrait de phases. Autrement dit, elles ont les mêmes courbes solutions (donc les mêmes orbites dans le portrait de phases), mais l'expression pour les courbes est différentes.

Exercice 5. Parmi les dessins suivants, indiquer lesquels sont des portraits de phases. Pour ceux qui ne sont pas des portraits de phases, expliquer pourquoi.



Solution. En partant du coin en haut à gauche et allant de droite à gauche :

Oui	Non	Non
Oui	Oui	Non
Non	Oui	Oui

Pour celles qui sont un portrait de phases, il n'y a aucune incohérence dans le sens des flèches et aucune ligne ne se croise, sauf en point singulier.

Pour la deuxième, le segment de droite va de droite à gauche. Or, juste en dessous, l'orbite est orientée vers la droite. Ainsi, il y a un conflit dans le sens des flèches.

Pour la troisième, au dessus du point singulier de gauche, on voit que les flèches se contredisent.

Pour la sixième, au centre de l'image, les flèches se contredisent.

Pour la septième, si on continuait à dessiner des orbites, il y aurait un conflit près des axes vericales.

Exercice 6. Soit l'EDO

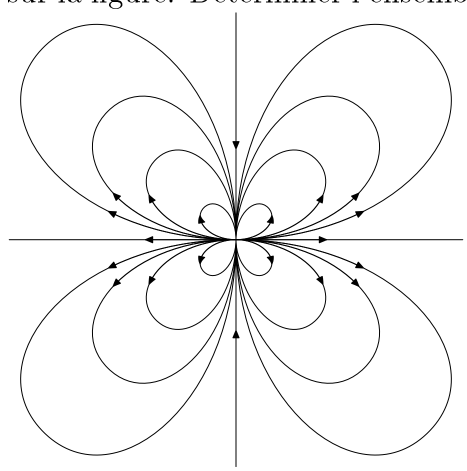
$$\begin{cases} x' = x^3 - 3xy^2, \\ y' = -y^3 + 3x^2y. \end{cases}$$

a) Trouver une intégrale première.

b) Exprimer le système en coordonnées polaires.

c)† Essayer de tracer le portrait de phases.

d) Le portrait de phases est sur la figure. Déterminer l'ensemble ω-limite de tous les points.

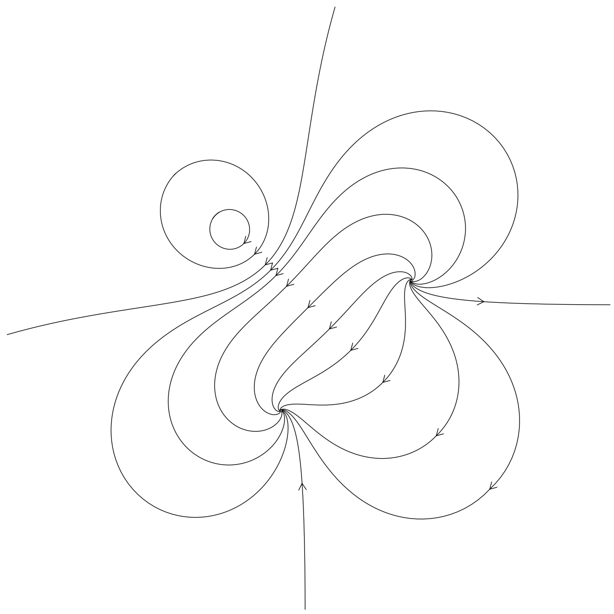


Solution. Pour $\{(x, y)\}$, avec $y \neq 0$, l'ensemble ω-limite est $\{(0, 0)\}$. Pour $\{(x, 0)\}$, il n'y a pas d'ensemble ω-limite, car l'orbite tend vers l'infini.

e) On introduit des petits paramètres ε, η à l'EDO :

$$\begin{cases} x' = x^3 - 3xy^2 - \varepsilon, \\ y' = -y^3 + 3x^2y - \eta. \end{cases}$$

Pour une valeur choisi de (ε, η), il y a trois points singuliers : un centre, un foyer stable et un foyer instable. On peut déduire que le portrait de phases devra ressembler à la figure suivante. Expliquer pourquoi il n'y aurait pas d'autres possibilités pour le portrait de phases que celui tracer dans la figure.



Solution. Il n'y a pas d'autres possibilités, car le portrait de phases doit ressembler à celui donné au 6d). En effet, comme le flot dépend continûment des paramètres, les portraits de phases doivent se ressembler lorsque les paramètres varient très peu.

Exercice 7. a) Nommer une des propriétés *mathématiques* du chaos.

b) Si un système est chaotique, peut-on le diviser en composantes indépendantes.

c) Quel problème rencontre-t-on lors du calcul numérique d'une orbite dans un système chaotique?

Exercice 8. a) Nommer une propriété d'un attracteur.

b) Qu'est-ce qui différencie un attracteur étrange des autres types d'attracteurs?

Solution. a) Un attracteur est positivement invariant. Ainsi, si Φ est le flot et A est l'attracteur, on doit avoir $\Phi(t, A) = A$ pour tout $t \geq 0$. b) Un attracteur étrange possède une structure fractale.

Exercice 9. Soit (G, U, Φ) un système dynamique. (On considère que G est $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$, $[0, \infty)$ ou $\mathbb{R}$.) Soit $x_0 \in U$ un point fixe (c-à-d. $\Phi(t, x_0) = x_0$ pour tout $t \in G$). On dit que x_0 est *asymptotiquement stable* si pour tout x assez près de x_0, on a que $\lim_{t \to \infty} \Phi(t, x) = x_0$.

a) Montrer qu'un nœud stable est asymptotiquement stable pour un système linéaire.

b) Montrer qu'un col n'est pas asymptotiquement stable pour un système linéaire.

Exercice 10†**.** (Facultatif) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et (G, U, Φ) un système dynamique. Soit $x_0 \in U$

un point fixe. On dit que x_0 est *stable* (ou stable au sens de Lyapounov) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x_0 - x\| < \delta$, alors il existe $T_x \geq 0$ tel que pour tout $t \geq T_x$, on a $\|\Phi(t, x) - x_0\| < \varepsilon$.

a) Montrer que si x_0 est asymptotiquement stable, alors x_0 est stable au sens de Lyapounov.

b) Montrer qu'un centre est stable au sens de Lyapounov.

Exercice 11. La position d'un poids attaché à un ressort est modélisé par $x'' = F(x)$. Il est commode de prendre F linéaire, mais d'autres modèles existent. On suppose que la force du ressort est donné par $F(x) = -x + x^3$, pour x suffisamment petit (si x était trop grand, le ressort serait trop étiré ou contracté pour que le modèle physique continue à avoir du sens).

a) Trouver les points singuliers et calculer les linéairisés.

Solution. On se rapport au système

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + x^3. \end{cases}$$

Pour avoir un point singulier, on doit avoir $y = 0$ et $-x + x^3 = 0$. Ainsi, il y a trois points singuliers : $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$.

On pose et on calcule

$$f(x,y) := \begin{pmatrix} y \\ -x + x^3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 3x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A := \mathrm{d}f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \mathrm{d}f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C := \mathrm{d}f(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les linéarisés sont $Y' = AY$, $Y' = BY$ et $Y' = CY$.

b) Déterminer si l'origine est un centre ou un foyer faible.

Solution. On trouve un intrégrale première comme suit. D'abord, on a l'EDO suivante $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x+x^3}{y}$ que l'on résout par séparation de variables :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x + x^3}{y} &\Leftrightarrow \int y \mathrm{d}y = \int (-x + x^3) \mathrm{d}x \\ &\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C \end{aligned}$$

Ainsi, l'intégrale première est $h(x,y) = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}$. On montre maintenat qu'elle possède un extrémum local en $(0,0)$. On a

$$\nabla h(x,y) = (\, x - x^3, y \,) \qquad \mathrm{Hes}h(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - x^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que Hes$h(0,0)$ possède deux valeurs propres positives, donc $(0,0)$ est un minimum local de h. On peut enfin conclure que $(0,0)$ est un centre, puisque les courbes de niveau de h sont des courbes fermées (et simples) dans un voisinage de $(0,0)$.

c) Tracer le portrait de phases à partir des linéairisés et la conclusion obtenue au b).

d) Interpréter physiquement les états du ressort. Inquider quelles orbites n'ont pas de sens du point de vue de la physique.