Équations différentielles

Révision

Ces exercices servent à vous aider à vous préparer, mais ils ne remplacent pas les séries d'exercices. Ainsi, cette liste ne prétend pas couvrir chaque recoin de la matière.

Exercice 1. Tracer une esquisse du portrait de phases des EDO suivantes. Justifier que cette esquisse représente le vrai portrait de phases. *Remarque* : faites-le d'abord à la main, puisqu'à l'examen vous n'aurez pas l'assistance d'un ordinateur.

a) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} Y$

b) $Y' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y$

c) $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x^2 + xy \end{cases}$

d) $\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 3x^2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x' = y + x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \\ y' = -x + y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \end{cases}$

f) $\begin{cases} x' = y^2 - 1 \\ y' = x \end{cases}$

Exercice 2. Résoudre les EDO linéaires suivantes.

a) $Y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y$

b) $Y' = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} Y$

c) $Y' = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} Y$

d) $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} Y$

Exercice 3. Soit $A \in \mathrm{Mat}(5 \times 5)$ une matrice qui possède les valeurs propres suivantes : $\lambda_1 = 1$ double, $\lambda_2 = 2$ simple, $\lambda_3 = 2-i$ et $\lambda_4 = 2+i$. La valeur propre λ_1 possède seulement un vecteur propre. Décrire la solution de $Y' = AY$ le plus explicitement possible.

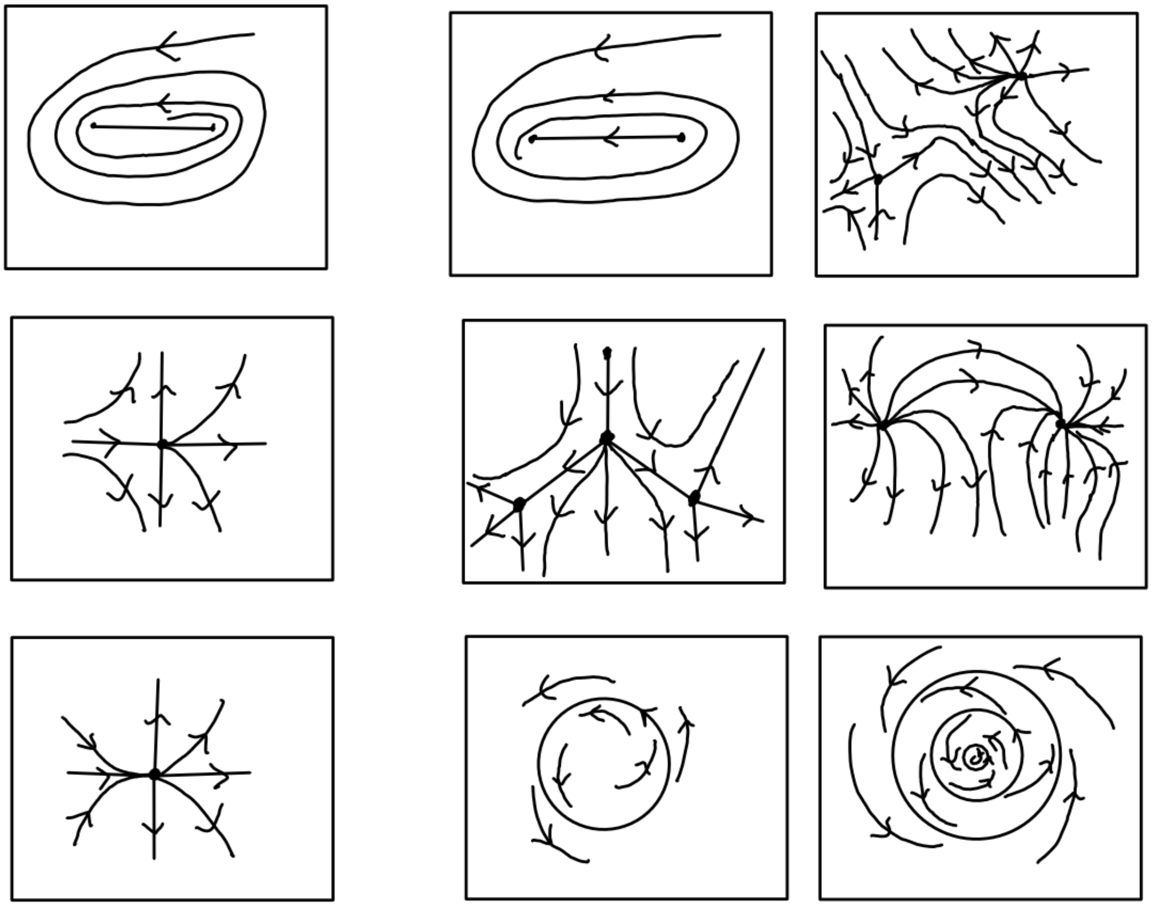
Exercice 4. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1.

a) Montrer que les deux EDO $y' = f(y)$ et $z' = \frac{f(z)}{1+\|f(z)\|^2}$ possèdent les mêmes intégrales premières.

b) Les deux EDO ont-elles nécessairement les mêmes solutions?

c) Quel est le lien entre les solutions des deux EDO?

Exercice 5. Parmi les dessins suivants, indiquer lesquels sont des portraits de phases. Pour ceux qui ne sont pas des portraits de phases, expliquer pourquoi.



Exercice 6. Soit l'EDO

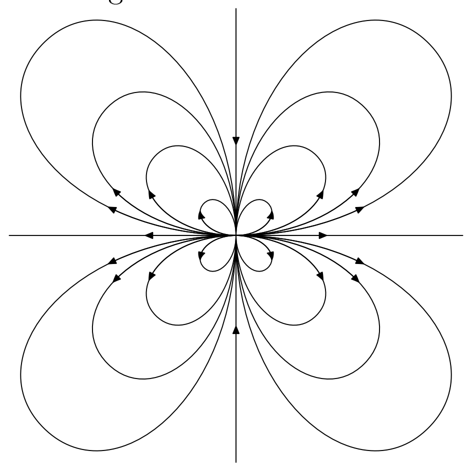
$$\begin{cases} x' = x^3 - 3xy^2, \\ y' = -y^3 + 3x^2 y. \end{cases}$$

a) Trouver une intégrale première.

b) Exprimer le système en coordonnées polaires.

c)† Essayer de tracer le portrait de phases.

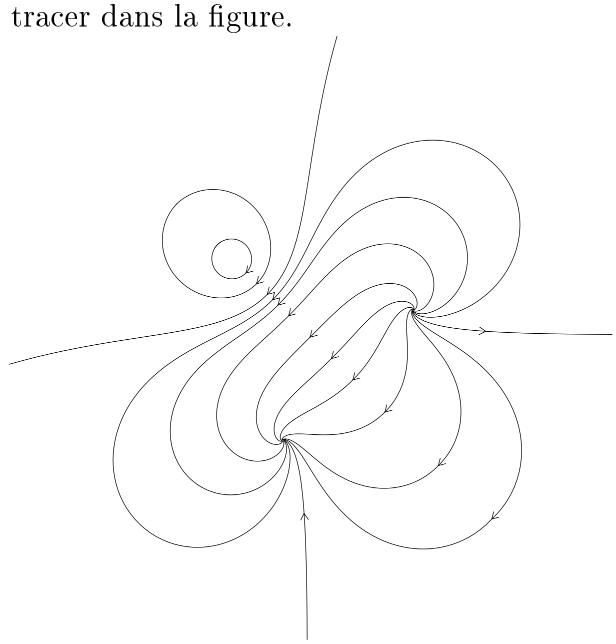
d) Le portrait de phases est sur la figure. Déterminer l'ensemble ω-limite de tous les points.



e) On introduit des petits paramètres ε, η à l'EDO :

$$\begin{cases} x' = x^3 - 3xy^2 - \varepsilon, \\ y' = -y^3 + 3x^2y - \eta. \end{cases}$$

Pour une valeur choisi de (ε, η), il y a trois points singuliers : un centre, un foyer stable et un foyer instable. On peut déduire que le portrait de phases devra ressembler à la figure suivante. Expliquer pourquoi il n'y aurait pas d'autres possibilités pour le portrait de phases que celui tracer dans la figure.



Exercice 7. a) Nommer une des propriétés *mathématiques* du chaos.

b) Si un système est chaotique, peut-on le diviser en composantes indépendantes.

c) Quel problème rencontre-t-on lors du calcul numérique d'une orbite dans un système chaotique?

Exercice 8. a) Nommer une propriété d'un attracteur.

b) Qu'est-ce qui différencie un attracteur étrange des autres types d'attracteurs?

Exercice 9. Soit (G, U, Φ) un système dynamique. (On considère que G est $\mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}$, $[0, \infty)$ ou $\mathbb{R}$.) Soit $x_0 \in U$ un point fixe (c-à-d. $\Phi(t, x_0) = x_0$ pour tout $t \in G$). On dit que x_0 est *asymptotiquement stable* si pour tout x assez près de x_0, on a que $\lim_{t\to\infty} \Phi(t, x) = x_0$.

a) Montrer qu'un nœud stable est asymptotiquement stable pour un système linéaire.

b) Montrer qu'un col n'est pas asymptotiquement stable pour un système linéaire.

Exercice 10†. (Facultatif) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et (G, U, Φ) un système dynamique. Soit $x_0 \in U$ un point fixe. On dit que x_0 est *stable* (ou stable au sens de Lyapounov) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x_0 - x\| < \delta$, alors il existe $T_x \geq 0$ tel que pour tout $t \geq T_x$, on a $\|\Phi(t, x) - x_0\| < \varepsilon$.

a) Montrer que si x_0 est asymptotiquement stable, alors x_0 est stable au sens de Lyapounov.

b) Montrer qu'un centre est stable au sens de Lyapounov.

Exercice 11. La position d'un poids attaché à un ressort est modélisé par $x'' = F(x)$. Il est commode de prendre F linéaire, mais d'autres modèles existent. On suppose que la force du ressort est donné par $F(x) = -x + x^3$, pour x suffisamment petit (si x était trop grand, le ressort serait trop étiré ou contracté pour que le modèle physique continue à avoir du sens).

a) Trouver les points singuliers et calculer les linéairisés.

b) Déterminer si l'origine est un centre ou un foyer faible.

c) Tracer le portrait de phases à partir des linéairisés et la conclusion obtenue au b).

d) Interpréter physiquement les états du ressort. Inquider quelles orbites n'ont pas de sens du point de vue de la physique.