

## Chapitre 3. Équations non linéaires

Les équations non linéaires sont habituellement trop difficiles à résoudre. Le théorème d'existence et d'unicité s'applique toujours aux problèmes de Cauchy, donc on ne remet pas en doute l'existence des solutions, mais il est bien plus difficile d'énoncer des généralités quantitatives. Ainsi, à partir de maintenant, on s'intéresse à l'aspect qualitatif des solutions.

### § 3.1. Espaces de phases et flots.

L'espace de phases est l'ensemble de tous les états d'un processus déterministe.

Ex. L'état d'un pendule est déterminé par sa position et sa vitesse. En effet, son mouvement est décrit par

$$z'' + z = \sin z, \quad z = \text{l'angle du pendule.}$$

Dès que l'on connaît sa position et sa vitesse au temps  $t$ , on connaît son mouvement futur et passé.

Ainsi, l'espace de phase est  $(z, z') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ .

On reviendra à cette notion pour la définir formellement. Pour le moment, on peut voir l'espace de phases comme l'ensemble des conditions initiales permises.

**Def** Un système  $y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)})$  est autonome si  $f$  ne dépend pas de  $x$  (c-à-d  $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ ). Si un système est autonome, on écrit  $y^{(n)} = f(y, \dots, y^{(n-1)})$  (on omet la variable indépendante).

Ex ① Le mouvement d'un pendule est autonome

$$z'' + z = \sin z \quad (\text{l'éq. est en terme de } z \text{ seulement})$$

② Le système  $\begin{cases} x'' = y \\ y'' = -x \end{cases}$  est autonome

③ Le système  $\begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x \end{cases}$  n'est pas autonome, mais il peut le devenir

en ajoutant une équation :

$$\begin{cases} x' = y + t^2 \\ y' = x \\ t' = 1 \end{cases}$$

Remarque : Les deux systèmes sont équivalents, mais il y a un prix à payer pour rendre le système autonome dans ce cas : le nouveau système n'est plus linéaire.

Comme le montre le troisième exemple, on peut toujours transformer un système non autonome en un système autonome en ajoutant une équation. Les systèmes autonomes seront particulièrement adaptés aux méthodes qui suivront.

**Déf** Soit  $y' = f(y)$  un système autonome, où  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow U$  est de classe  $C^1$ .

Pour tout  $z \in U$ , on note  $g_z$  la solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = z. \end{cases}$$

On appelle le flot de ce système la fonction  $\Phi(x, z) = g_z(x)$ .

On appelle  $U$  l'espace de phases.

Remarques ① Pour chaque  $z \in U$ , on a une fonction  $\Phi(\cdot, z)$  définie sur un certain  $I \ni 0$  inconnue. Certaines auteurs demandent que  $\Phi(\cdot, z)$  soit définie sur  $\mathbb{R}$ .

② Si  $f$  est Lipschitz ( $\|f(y_1) - f(y_2)\| \leq M \|y_1 - y_2\|$ ), alors  $\Phi(\cdot, z)$  est définie sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $z \in U$  par le théorème d'existence global.

③ Dans le cas  $n=1$ , si  $|f(y)| \leq A|y| + B$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , alors on a le même résultat qu'au ②.

(optionnelle)

En effet, si  $y_0 > 0$ , alors on peut montrer que si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont solutions respectives de

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y' = Ay + B \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

alors  $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ . Ainsi, pour tout  $x \in (0, \infty)$  dans le domaine de  $\varphi_1$ , on a  $\varphi_1(x) < \infty$ , donc  $\varphi_1$  se prolonge. L'argument est semblable pour  $y_0 < 0$ .

Ex.  $y' = y^2$ . On trouve la solution générale par séparation de variables

$$y' = y^2 \Rightarrow \frac{y'}{y^2} = 1$$

Sol. sing.  $y = 0$ .

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dx$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{y} = x + D \Rightarrow y = \frac{-1}{x + D}$$

Pour  $z \in \mathbb{R}$ , la solution à  $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = z \end{cases}$  est

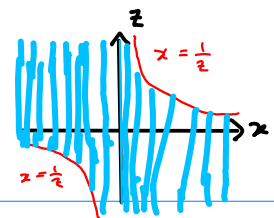
$$y(0) = \frac{-1}{D} = z \Rightarrow D = \frac{-1}{z}$$

donc  $g_z(x) = \frac{-1}{x - \frac{1}{z}} = \frac{-z}{xz - 1}$ . On voit  $g_z(x)$  est bien définie sur  $(\frac{1}{z}, \infty)$  si  $z < 0$ ,  $(-\infty, \frac{1}{z})$  si  $z > 0$  et  $\mathbb{R}$  si  $z = 0$ .

Le flot est donc  $\Phi(x, z) = \begin{cases} \frac{-z}{xz - 1}, & \text{si } z > 0 \text{ et } x \in (-\infty, \frac{1}{z}) \\ \frac{-z}{xz - 1}, & \text{si } z < 0 \text{ et } x \in (\frac{1}{z}, \infty) \\ 0, & \text{si } z = 0 \text{ et } x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Le domaine de  $\Phi$  est difficile à décrire.  
C'est pourquoi, en général, on ne tentera pas de décrire son domaine, sauf si l'on sait qu'il a la forme  $\mathbb{R} \times U$ .

Ainsi, lorsque l'on dira «  $\Phi(x, y)$  possède une propriété pour tout  $x$  », il sera sous-entendu qu'on parle de tout  $x$  où  $\Phi(x, y)$  est définie.



Domaine de  $\Phi$   
(pas le portrait de phases)

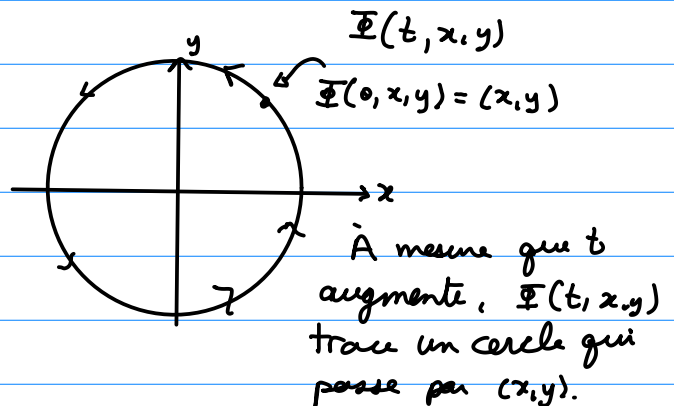
② Calculer le flot de  $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$ . On a déjà vu que la solution

générale est  $\gamma = \begin{pmatrix} C_1 \sin t + C_2 \cos t \\ -C_2 \sin t + C_1 \cos t \end{pmatrix}$ . Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . La solution au PC

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(0) = x_0 = C_2 \\ y(0) = y_0 = C_1 \end{cases}$$

$$\text{soit } g^t(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} y_0 \sin t + x_0 \cos t \\ -x_0 \sin t + y_0 \cos t \end{pmatrix}$$

Interprétation dans le plan :





③  $y'' = -y$ . Le flot de cette équation correspond à celui du système que l'on obtient en réduisant l'ode:  $\begin{cases} u' = v, \\ v' = -u. \end{cases}$  C'est le système

de l'exemple précédent, donc son flot est  $\Phi(t, u, v) = \begin{pmatrix} v \sin t + u \cos t \\ -u \sin t + v \cos t \end{pmatrix}$ .

**Proposition** Soit  $y' = f(y)$  un système autonome,  $\Phi$  son flot et  $U$  l'espace de phase. Alors pour tout  $y \in U$  et pour  $s, t \in \mathbb{R}$  tels que  $\Phi(0, y)$ ,  $\Phi(t, y)$  et  $\Phi(s+t, y)$  sont bien définies, on a

$$\Phi(t+s, y) = \Phi(t, \Phi(s, y))$$

Dém. Comme dans le cas linéaire.  $\square$

On s'intéresse à décrire le comportement possible d'une trajectoire de  $\Phi$ .

**Théorème** (de prolongement)

Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction de classe  $C^1$  et soit

$\Phi$  le flot de  $y' = f(y)$ . Pour tout  $y \in U$ , si  $\Phi(\cdot, y)$  est définie sur l'intervalle maximal  $I$  et s'il existe un rectangle  $R = [-A, A]^n$  tel que  $\Phi(t, y) \in R \forall t \in I$ , alors  $I = \mathbb{R}$ .

Remarque (optionnel) Ceci se généralise facilement en remplaçant le domaine de  $f$  par un ouvert  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $R$  par un compact de  $\mathbb{R}^n$ .

Dém. (Optionnel)

On montre la version générale ( $U \subseteq \mathbb{R}^n$  ouvert au lieu de  $\mathbb{R}^n$  et  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  compact au lieu de  $R$ ).

Pour chaque  $y \in U$ , il existe une boule  $B(y, r_y)$  et  $\varepsilon(y) > 0$  tels que pour tout  $z \in B(y, r_y)$ ,  $\Phi(\cdot, z)$  est définie sur

$I_z \ni (-\varepsilon(y), \varepsilon(y))$ . (Cela se voit dans la démonstration du théorème d'existence et d'unicité.)

Puisque  $K$  est compact, il existe  $y_1, \dots, y_k \in U$  tels que  $B(y_1, r_{y_1}) \cup \dots \cup B(y_k, r_{y_k}) \supseteq K$ .

On pose  $\varepsilon = \min \{ \varepsilon(y_1), \varepsilon(y_2), \dots, \varepsilon(y_k) \} > 0$ .

Ensuite, on pose  $T = \sup \{ \tau \mid \Phi(\tau, y) \text{ est définie} \}$ . On suppose que  $T < \infty$ . Soit  $T - \frac{\varepsilon}{4} < \tau < T$ . Alors  $\Phi(\tau, y) \in B(y_j, r_{y_j})$  pour un certain  $j$ . Ainsi,  $\Phi(\cdot, \Phi(\tau, y))$  est définie au moins sur l'intervalle  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  et donc  $\Phi(\frac{\varepsilon}{2}, \Phi(\tau, y)) = \Phi(\tau + \frac{\varepsilon}{2}, y)$  est bien définie. Cela contredit le fait que  $T$  est le suprémum. Ainsi,  $\Phi(\cdot, y)$  est définie sur  $(a, \infty)$ . On montre que  $a = -\infty$  de la même façon.  $\square$  (fin de la dém. optionnel)

Si  $\Phi(\cdot, y)$  est telle que dans l'énoncé, que ce passe-t-il à la limite lorsque  $t \rightarrow \infty$ ? Existe-t-elle? En général, la réponse est compliquée. Par contre, si  $n=1$ , on peut se convaincre que la limite converge. Si  $n=2$ , il s'agit du théorème de Poincaré-Bendixon que l'on verra plus tard.

Si:  $n \geq 3$ , on peut avoir des comportements chaotiques.

**Déf** Soit  $y' = f(y)$  un système autonome,  $\Phi$  son flot et  $U$  l'espace de phases.

- ① Un point d'équilibre ou un point fixe est un point  $y \in U$  tel que  $\Phi(x, y) = y$  pour tout  $x$ .
- ② L'orbite de  $y \in U$  est  $O_y := \text{orb}(y) := \{ \Phi(x, y) \mid x \text{ t.q. } \Phi(x, y) \text{ est définie} \} \subseteq U$ .
- ③ Le portrait de phases est l'ensemble de toutes les orbites.

Ex. On a vu au début du cours qu'un pendule était décrit par  $x'' = -\sin x$  lorsque l'angle  $x$  n'est pas petit.

On a le système  $\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x \end{cases}$ , où  $y$  est la vitesse angulaire.

On pose  $f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x \end{pmatrix}$ . Les zéros de  $f$  sont

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -\sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Si  $\varphi$  est la solution de

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x \\ x(0) = n\pi \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

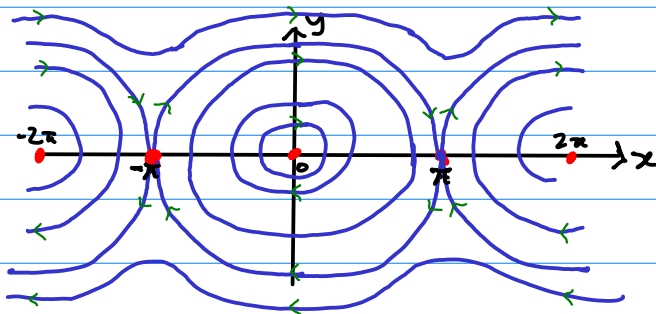
alors  $\varphi(t) = \begin{pmatrix} n\pi \\ 0 \end{pmatrix}$  pour tout  $t$ , car la fonction constante est une solution

et la solution est unique. Ainsi, les points  $(x, y) = (n\pi, 0)$  sont des solutions.

Ensuite, on remarque que si  $h(x, y) = -\cos x + \frac{y^2}{2}$ , alors  $\nabla h = (\sin x, y)$  et donc  $f(x, y) \cdot \nabla h(x, y) = 0$ .

Ainsi, les courbes de niveau de  $h$  sont parallèles au champ de vecteurs  $f$ .

Le portrait de phases est :



Seulement à l'aide du portrait de phases, l'on peut déduire les éléments suivants :

1. Le pendule à quatre états :
  - i) oscille à l'infini (petits cercles)
  - ii) fait un tour complet (les courbes ondulées en haut et en bas)
  - iii) en équilibre
  - iv) se meut vers une position d'équilibre sans osciller et sans jamais s'y rendre (courbe qui relie deux points rouges)

2. Les points  $(2n\pi, 0)$  "ressemblent" à des centres.

3. Si on ajoute les bonnes directions aux courbes, on verra que les points  $((2n+1)\pi, 0)$  "ressemblent" à des cols.

4. L'orbite de  $(x_0, y_0)$  est l'ensemble

des points  $\left\{ (x, y) \mid -\cos x + \frac{y^2}{2} = -\cos x_0 + \frac{y_0^2}{2} \right\}$ ;

c'est la courbe bleue qui passe par  $(x_0, y_0)$ .

avec le champ de vecteurs  $f(x, y)$

**Def** Soit  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs. On dit que  $h: U \rightarrow \mathbb{R}$  est une intégrale première de  $f$  si pour tout  $y \in U$ , on a  $\nabla h(y) \cdot f(y) = 0$ .

**Rappel** Un champ de vecteurs  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définit le système d'EDO d'ordre 1  $y' = f(y)$  et vice versa.

Si  $h$  est une intégrale première et si  $Y: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution de  $Y' = f(Y)$ , alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} h \circ Y(t) &= \nabla h(Y(t)) Y'(t) \\ &= \nabla h(Y(t)) \cdot f(Y(t)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que  $h \circ Y(t) = C$ .  
Autrement dit, la courbe  $Y$  se trouve dans la surface de niveau  $h(y) = C$ .

Les intégrales premières permettent de mieux comprendre les portraits de phases. Cependant, il est rare qu'une EDO possède une intégrale première non triviale (c-à-d. non constante).

### §3.2. Linéarisation

Le but est d'étudier les portraits de phase. Pour ce faire, on commence par étudier un petit voisinage d'un point singulier.

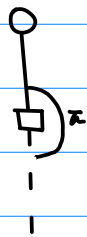
**Def** Soit  $y' = f(y)$  une EDO et  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  l'espace de phase. Si  $y_0 \in U$  est un point singulier, alors le linéarisé en  $y_0$  est l'EDO linéaire  $y' = f'(y_0)y$ .

L'idée est que les solutions de  $y' = f(y)$  dans un voisinage de  $y_0$  devrait ressembler aux solutions de  $y' = f'(y_0)y$  dans un voisinage de 0.

**Ex.** L'équation du pendule est  $x'' = -\sin x$ . Le système est

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\sin x. \end{cases}$$

En  $y=0$  et  $x=\pi$ , il y a un point singulier qui correspond au pendule au repos à la verticale vers le haut.

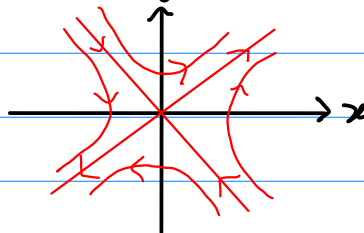


Soit  $f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -\sin x \end{pmatrix}$ . On a  $f'(\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix} \Big|_{(\pi,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Le système linéaire est  $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ . Les valeurs propres sont

$\lambda = \pm 1$ . Le vecteur propre de  $\lambda = 1$  est  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et de  $\lambda = -1$ ,  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Le portrait de phase du  $y$  linéarisé est celui d'un col :



On a vu dans l'exemple précédent que cela ressemble au portrait de phase dans un voisinage de  $(\pi,0)$  du pendule.

Si on examine le linéarisé de tous les points singuliers, cela peut nous donner une bonne idée du portrait de phase.

$$\text{Ex. } \begin{cases} x' = (x-1) + (x-1)y \\ y' = xy \end{cases} \quad \begin{matrix} x'=0 \Leftrightarrow (x-1)(1+y) = 0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ou } y=-1 \\ y'=0 \quad \quad \quad xy=0 \quad \quad \quad \text{et} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x=0 \text{ ou } y=0 \end{matrix}$$

Il ya deux points singuliers:  $(1,0)$  et  $(0,-1)$

On pose  $f(x,y) = \begin{pmatrix} (x-1) + (x-1)y \\ xy \end{pmatrix}$ .

En  $(1,0)$ , on a

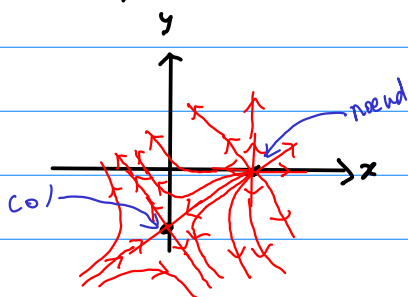
$$f'(1,0) = \begin{pmatrix} 1+y & (x-1) \\ y & x \end{pmatrix} \Big|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le linéarisé en  $(1,0)$  est  $y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ , c'est un

nœud instable.

Ensuite, en  $(0,-1)$ , on a  $f'(0,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Le linéarisé est

un col. Le vecteur propre de  $\lambda = -1$  est  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et de  $\lambda = 1$ ,  $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .



Y a-t-il d'autre sorte d'orbite particulière? La réponse est oui, mais elles n'apparaissent pas dans les systèmes linéaires. Pour en donner un exemple, on aura besoin des coordonnées polaires du plan.

### §3.3 Changement de coordonnées.

**D1** Soit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  l'espace de phase de l'EDO  $y' = f(y)$ . Soit  $g: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$  une fonction inversible telle que  $g$  et  $g^{-1}$  sont de classe  $C^1$  (difféomorphisme).

1. Le champ de vecteurs image de  $f$  par  $g$  (le pushforward en anglais)

est défini par

$$(g_* f)(g(x)) := g'(x) f(x).$$

2. Une EDO  $z' = h(z)$ , dont l'espace de phase est  $V$ , est équivalente à  $y' = f(y)$  s'il existe un difféomorphisme  $g: U \rightarrow V$  telle que  $g_* f = h$ .

**Théorème** Si  $y' = f(y)$  et  $z' = h(z)$  sont équivalentes, avec  $g_* f = h$ , alors  $y$  est solution de  $y' = f(y)$  si et seulement si  $g \circ y$  est solution de  $z' = h(z)$ .

Dém

$$\text{On dérive: } \frac{d}{dx} g \circ y(x) = g'(y(x)) y'(x) = g'(y(x)) f(y(x)) = (g_* f)(g \circ y(x)).$$

C'est bien une solution. La réciproque est pareil, en utilisant  $g^{-1}$ .  $\square$

Ex. Soit  $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = xy - 1 \end{cases}$ ,  $f(x, y) = \begin{pmatrix} x - y \\ xy - 1 \end{pmatrix}$ .

$$f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \Leftrightarrow x = y \text{ et } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ et } y = x \\ \text{et } xy - 1 = 0$$

$$\text{On pose } (x_0, y_0) = (1, 1) \text{ et } g(x, y) = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}.$$

Alors  $g$  est inversible et  $g$  et  $g^{-1}$  sont de classe  $C^1$ .

On a

$$\begin{aligned} (g_* f)(g(x, y)) &= dg(x, y) \cdot f(x, y) = f(x, y) \\ (g_* f)(x - x_0, y - y_0) &= f(x, y). \end{aligned}$$

On pose  $u = x - x_0$  et  $v = y - y_0$ . On a donc

$$g_* f(u, v) = f(u + x_0, v + y_0) = \begin{pmatrix} u - v \\ (u + x_0)(v + y_0) - 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{car } x_0 - y_0 = 0)$$



l'EDO  $\begin{cases} u' = u + v + x_0 + y_0 \\ v' = (u + x_0)(v + y_0) - 1 \end{cases}$  est équivalente à l'EDO de départ.

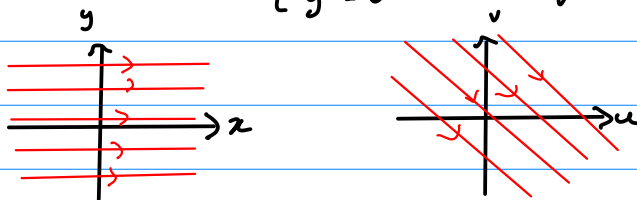
Le point singulier  $(1, 1)$  s'est fait translater en  $(0, 0)$  par  $g$ .

Ex. Soit  $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \end{cases}$  et  $g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ -2x \end{pmatrix}$ . Alors  $g$  est linéaire

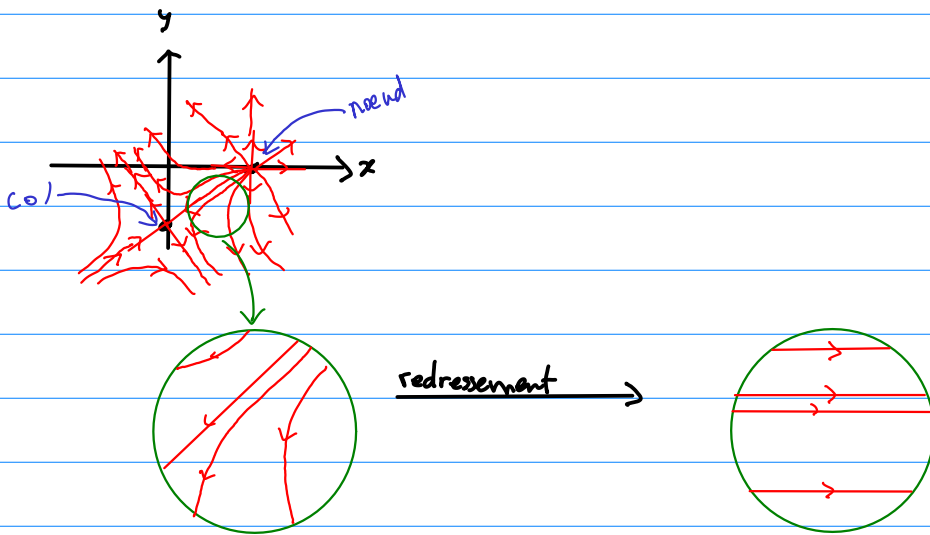
et comme 0 n'est pas une valeur propre,  $g$  est inversible.  
 $C$  est donc un difféomorphisme (puisque une application linéaire est  $C^\infty$ ). On a

$$(g_* f)(g(x)) = g'(x) f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'EDO  $\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 0 \end{cases}$  est équivalente à  $\begin{cases} u' = 2 \\ v' = -2 \end{cases}$



**Théorème** (de redressement) Soit  $y' = f(y)$  une EDO et  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  son espace de phase. Pour chaque  $y \in U$ , si  $f(y) \neq 0$ , alors il existe un petit voisinage  $U_y \subseteq U$  de  $y$ , un voisinage  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  et un difféomorphisme  $g: U \rightarrow V$  telle que  $(g_* f) = \vec{v}$ , où  $\vec{v}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



Autrement, loin d'un point singulier, le flot ressemble toujours à des lignes droites. C'est l'une des raisons pourquoi l'on doit étudier les points singuliers.

Les coordonnées polaires sont  $\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \end{cases}$  mais cela ne donne pas un difféomorphisme. Pour contourner le problème, on restreint  $r$  à  $(0, \infty)$  et  $\theta$  à  $(0, 2\pi)$ .

### §3.4 Cycles limites

Ex Soit le système  $\begin{cases} x' = y + x(1-x^2-y^2), \\ y' = -x + y(1-x^2-y^2). \end{cases}$  On pose  $\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$  Si on dérive, on trouve

$$x' = r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta = y + x(1-x^2-y^2) = r \sin \theta + r \cos \theta (1-r^2)$$

$$y' = r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta = -x + y(1-x^2-y^2) = -r \cos \theta + r \sin \theta (1-r^2)$$

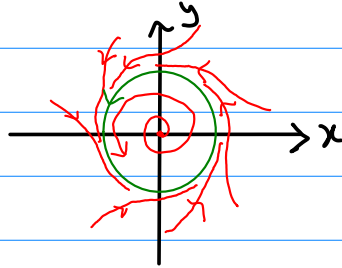
Ensuite, on a

$$r' = x' \cos \theta + y' \sin \theta = r(1-r^2) \Rightarrow r' = r(1-r^2)$$

$$r\theta' = y' \cos \theta - x' \sin \theta = -r \quad \theta' = -1$$

On a  $r' = 0$  si  $r = 0$  ou  $\pm 1$ . On rejette  $-1$ . On a une solution  $\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c \\ t+D \end{pmatrix}$ . Cela correspond à une orbite en cercle dans le plan de phase en  $(x, y)$ .

En fait, puisque  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ , on trouve



La courbe verte s'appelle un cycle limite.

Que nous dit le linéarisé? On pose  $f(x, y) = \begin{pmatrix} y + x(1-x^2-y^2) \\ -x + y(1-x^2-y^2) \end{pmatrix}$ .

En  $(0, 0)$ , on a  $f'(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi, c'est un foyer instable. Or, la

seule orbite qui se referme est celle en vert. Autrement dit, dans cet exemple, le linéarisé n'est pas suffisant pour comprendre le portrait de phase global.

**Def** Un cycle limite est une orbite périodique isolée des autres orbites périodiques.

Ex. Un centre n'a pas de cycle limite, car les orbites périodiques ne sont pas isolées.

Combien de cycles limites le système  $\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$  peut-il avoir? C'est une question difficile. Par exemple, dans le cas où  $f$  et  $g$  sont des polynômes de degré 2, on connaît un système qui en possède 5. Par contre, on ne sait pas s'il y a d'autres tels systèmes qui en ont plus que 5. Cela fait partie de la deuxième partie du 16<sup>e</sup> problème de Hilbert, qui est encore ouvert.

### § 3.5 Centre ou foyer faible

Le linéarisé est une approximation du système dans un voisinage du point fixe. Il faut faire attention: lorsque le linéarisé est un centre, alors ce n'est pas nécessairement un centre dans le système de départ.

Ex. Le système  $\begin{cases} x' = y + x(1-x^2-y^2) \\ y' = -x + y(1-x^2-y^2) \end{cases}$  montre que la

structure de centre est brisée par les termes non linéaires.

Ex. Soit  $|\varepsilon| < 2$ . Soit le système  $\begin{cases} x' = -y + \varepsilon x \\ y' = x \end{cases}$ . La matrice

est  $A = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et ses valeurs propres sont  $\lambda_{\pm} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}$ .

Ainsi, pour  $\varepsilon = 0$ , le système possède un centre, mais pour  $\varepsilon > 0$ , c'est un nœud instable et pour  $\varepsilon < 0$ , un nœud stable.

Ainsi, le centre ne supporte pas les petites variations.

**Def** Soit  $y' = f(y)$  une EDO,  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  son espace de phase (dans  $\underline{\mathbb{R}^2}$ ) et  $y_0$  un point singulier. On dit que  $y_0$  est un foyer faible stable si le linéarisé en  $y_0$  est un centre et si tout  $y$  assez proche de  $y_0$ , on a  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, y) = y_0$ . C'est un foyer faible instable si on remplace la limite par  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi(t, y) = y_0$ .

**Ex.** On reprend le système  $\begin{cases} x' = y + x(1-x^2-y^2), \\ y' = -x + y(1-x^2-y^2). \end{cases}$  On a vu qu'il

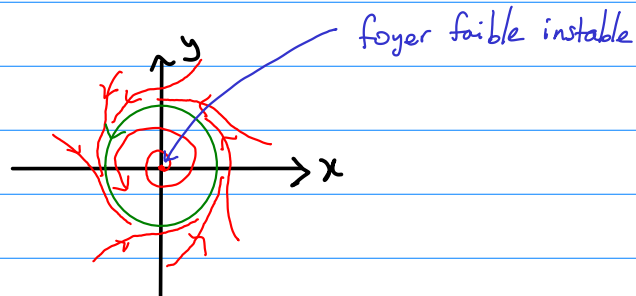
possède un cycle limite et qu'en  $(0,0)$ , le linéarisé possède un centre. Montrons que  $(0,0)$  possède un foyer faible instable.

Dans les coordonnées polaires, on avait  $r' = r(1-r^2)$ . Pour  $0 < r < 1$ , on voit que  $r' > 0$ . Ainsi,  $r$  est une fonction croissante.

Puisque  $\begin{matrix} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{matrix}$  et que  $r$  croît lorsque  $t$  croît, il suit que

$(x, y)$  s'approche de  $(0,0)$  lorsque  $t$  décroît. Analysons l'EDO

$r' = r(1-r^2)$ . On voit que  $r=0$  est un point singulier. On pose  $f(r) = r(1-r^2)$ . On a  $f'(0) = (1-r^2) + r(-2r) \Big|_{r=0} = 1$ . Ainsi,  $0$  est un point répulsif, donc lorsque  $t \rightarrow -\infty$ , on a bien  $r(t) \rightarrow 0$ , d'où  $(x, y) \rightarrow (0,0)$ .



### §3.6 Dépendance de la condition initiale

Dans le flot  $\Phi(x, y)$ , la composante  $y$  est une condition. Si on varie un peu cette condition, de quelle façon le flot varie-t-il?

**Lemme** (Inégalité de Grönwall)

Soit  $f, g: (a, b) \rightarrow [0, \infty)$  deux fonctions continues et positives.

Si il existe  $C \geq 0$  telle que

$$f(t) \leq C + \left| \int_{t_0}^t f(s)g(s) ds \right|,$$

alors on a  $f(t) \leq C e^{\left| \int_{t_0}^t g(s) ds \right|}$ .

Dém.

On suppose que  $a < t_0 \leq t < b$ . (Le cas où  $t_0 > t$  est semblable.)

On pose

$$G(t) = C + \int_{t_0}^t f(s)g(s) ds \geq 0.$$

On dérive et on obtient  $G'(t) = f(t)g(t) \stackrel{\text{hyp}}{\leq} \left( C + \int_{t_0}^t f(s)g(s) ds \right) g(t)$

$$= G(t)g(t).$$

Si  $C > 0$ , alors  $G(t) > 0$  et donc  $\frac{G'(t)}{G(t)} \leq g(t)$ . Ainsi, on a

$$\int_{t_0}^t \frac{G'(s)}{G(s)} ds \leq \int_{t_0}^t g(s) ds \Rightarrow \log \frac{G(t)}{G(t_0)} \leq \int_{t_0}^t g(s) ds.$$

$$\Rightarrow \frac{G(t)}{G(t_0)} \leq \exp\left(\int_{t_0}^t g(s) ds\right)$$

$$\Rightarrow G(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^t g(s) ds\right) \quad \left( \begin{array}{l} \text{car} \\ G(t_0) = C \end{array} \right)$$

Puisque  $f(t) \leq G(t)$ , on conclut que  $f(t) \leq C \exp\left(\int_{t_0}^t g(s) ds\right)$ .

Si  $C=0$ , on prend  $C_n = \frac{1}{n}$  et la partie précédente donne  $f(t) \leq \frac{1}{n} \exp(\int_{t_0}^t g(s) ds)$ . On conclut que  $f \equiv 0$ .  $\square$

Remarque On n'a pas besoin de supposer que  $f$  ou  $g$  soit dérivable pour obtenir l'inégalité.

### Théorème (Distance entre les solutions)

Soit  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  localement Lipschitz et soit  $y_0 \in U$ . Soit  $\Phi$  le flot de  $y' = f(y)$ . Il existe  $\delta > 0$  et  $K > 0$  tels que pour tout  $y \in U$ , si  $\|y - y_0\| < \delta$ , alors  $\|\Phi(t, y_0) - \Phi(t, y)\| \leq \|y_0 - y\| e^{K|t|} \quad \forall t$  assez petit.

Corollaire  $\Phi$  est continue en  $(t, y)$ .

Dém. (de la prop.)

Puisque  $f$  est localement Lipschitz, il existe  $K > 0$  et  $\delta > 0$  tels que si  $\|y - y_0\| < \delta$ , alors  $\|f(y) - f(y_0)\| \leq K \|y - y_0\|$ .

On pose  $\alpha(t) := \|\Phi(t, y_0) - \Phi(t, y)\|$ . On a alors

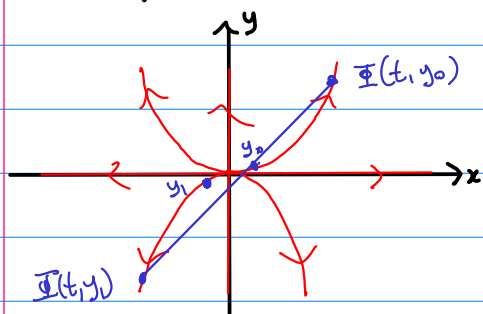
$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \left\| y_0 + \int_0^t f(\Phi(s, y_0)) ds - y - \int_0^t f(\Phi(s, y)) ds \right\| \\ &\leq \|y_0 - y\| + \int_0^t \|f(\Phi(s, y_0)) - f(\Phi(s, y))\| ds \\ &\leq \|y_0 - y\| + \int_0^t K \|\Phi(s, y_0) - \Phi(s, y)\| ds \\ &= \|y_0 - y\| + \int_0^t K \alpha(s) ds. \end{aligned}$$

Par le lemme de Grönwall, on obtient  $\alpha(t) \leq \|y_0 - y\| e^{\int_0^t K ds} = \|y_0 - y\| e^{K|t|}$ .  $\square$

Remarque Si  $f$  est globalement Lipschitz, alors on a que

$$\|\Phi(t, y_0) - \Phi(t, y_1)\| \leq \|y_0 - y_1\| e^{K|t|}$$

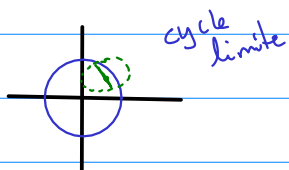
pour tout  $t$  et tout  $y_0, y_1 \in U$ , où  $K$  est la constante de Lipschitz de  $f$ .  
Cela veut dire qu'il est possible que les courbes solutions s'éloignent d'entre elles exponentiellement rapidement.



Bien que  $y_0$  et  $y_1$  soient très proches, on voit que  $\Phi(t, y_0)$  et  $\Phi(t, y_1)$  sont loin même pour  $t$  assez petit.

Ex On reprend l'exemple  $\begin{cases} x' = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$ . Ce système possède

un cycle limite : c'est le cercle  $x^2 + y^2 = 1$ . Puisque le flot est continu, si on choisit une condition initiale  $(x_0, y_0)$  très près du cercle, alors la solution sera très près du cercle pour des petites valeurs de  $t$ .



Théorème (de dépendance de la condition initiale) Si  $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , alors  $\Phi$  est de classe  $C^{r-1}$ .

On ne fera pas la démonstration, mais on note qu'elle utilise le fait que  $\Phi$  est de classe  $C^0$  (continue) qui est la corollaire précédent. Elle utilise également la formule  $\Phi(t, y) = y + \int_0^t f(\Phi(s, y)) ds$ .



### §3.7 Dépendance des paramètres.

Soit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  et soit  $f: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction des variables  $(y, \varepsilon) \in U \times V$ . On appelle  $\varepsilon$  des paramètres lorsqu'ils ne sont ni des variables dépendantes, ni des variables indépendantes de l'EDO  $y' = f(y, \varepsilon)$ .

On notera parfois  $f_\varepsilon(y) := f(y, \varepsilon)$  et la solution  $y_\varepsilon$ .

Ex: L'EDO  $x'' = -x + \varepsilon x'$  modélise les petites oscillations d'un pendule. Ici,  $\varepsilon$  est un paramètre qui représente le coefficient de frottement. On peut donc étudier le pendule avec différents coefficients de frottement.

Sous une petite variation du paramètre, le système change-t-il beaucoup?

**Théorème** (de dépendance des paramètres). Soit  $U \times V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  et  $f: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction. Si  $f$  est de classe  $C^r$ , alors le flot de  $y' = f(y, \varepsilon)$  est de classe  $C^{r-1}$  par rapport à  $(x, y, \varepsilon)$ .

Dém.

On considère le système 
$$\begin{cases} y' = f(y, \varepsilon) \\ \varepsilon' = 0 \\ y(0) = y_0 \\ \varepsilon(0) = \varepsilon_0 \end{cases}$$
 Par le théorème de la dépendance de la condition initiale, le flot  $\Phi: (x, y_0, \varepsilon_0) \mapsto \Phi(x, y_0, \varepsilon_0)$  est de classe  $C^{r-1}$ . □

Ex. Soit le modèle du pendule 
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x + \varepsilon y \end{cases}$$

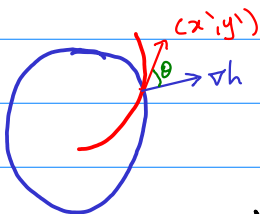
Lorsque  $\varepsilon = 0$ , on sait que le point fixe  $(0, 0)$  est un centre. Or, pour  $\varepsilon$  petit, ce centre se transforme en foyer puits.

On se rappelle que  $h(x,y) = \frac{y^2}{2} - \cos x$  est une intégrale première du système lorsque  $\varepsilon = 0$ .

Que devient-elle pour  $\varepsilon \neq 0$ ? Le long d'une solution  $(x,y) = (x(t), y(t))$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h(x,y) &= \nabla h(x,y) \cdot (x', y') \\ &= (\sin x, y) \cdot (y, -\sin x + \varepsilon y) \\ &= y \sin x - y \sin x + \varepsilon y^2 \\ &= \varepsilon y^2 \end{aligned}$$

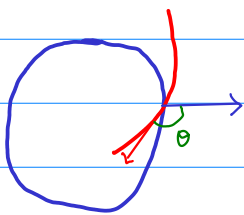
Ainsi, si  $\varepsilon > 0$ , alors  $\nabla h(x,y) \cdot (x', y') > 0$ . Cela veut dire que l'angle entre  $\nabla h$  et  $(x', y')$  se trouve entre  $-\frac{\pi}{2}$  et  $\frac{\pi}{2}$ .



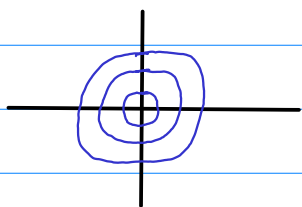
On doit avoir  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Cela veut dire que les solutions

sortent ou "s'échappent" des courbes de niveau de  $h$ .

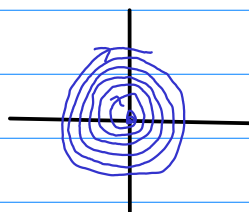
Ainsi, près de  $(0,0)$ , on a un foyer instable lorsque  $\varepsilon > 0$ .



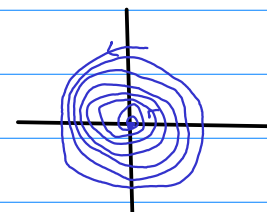
On doit avoir  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$  si  $\varepsilon < 0$ . Ainsi, les courbes solutions rentrent vers l'intérieur des courbes de niveau de  $h$ . On a alors un foyer stable près de  $(0,0)$ .



$\varepsilon = 0$   
 $(0,0)$  est un centre



$\varepsilon > 0$   
 $(0,0)$  est un foyer instable.



$\varepsilon < 0$   
 $(0,0)$  est un foyer stable.

Les cycles sont brisés par la perturbation et deviennent des spirales

L'interprétation physique de l'exemple précédent est que le système gagne de l'énergie si  $\varepsilon > 0$  et il en perd si  $\varepsilon < 0$ , car  $h$  est croissante ou décroissante resp.

### §3.8 Équations aux variations

Le théorème de dépendance des paramètres est utile pour le calcul.

On considère l'équation à petit paramètre  $\varepsilon$ :

$$\dot{x} = f(x, \varepsilon) \quad \text{où} \quad f(x, \varepsilon) = f(x, 0) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(x, 0) + \varepsilon^2 R(x, \varepsilon), \quad \text{où}$$

$R(x, \varepsilon)$  est un reste.

(Théorème de Taylor)

D'après le théorème de dépendance des paramètres et la formule de Taylor, le flot s'écrit

$$\Phi(t, x_0, \varepsilon) = \Phi(t, x_0, 0) + \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(t, x_0, 0) + \varepsilon^2 Q(t, x_0, \varepsilon),$$

où  $Q$  est un reste. Ensuite, on dérive de chaque côté par rapport à  $t$ .

Pour le côté gauche, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, x_0, \varepsilon) &= f(\Phi(t, x_0, \varepsilon), \varepsilon) = f(\Phi(t, x_0, 0), 0) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(t, x_0, 0), 0) \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(t, x_0, 0) \\ &\quad + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\Phi(t, x_0, 0), 0) + \varepsilon^2 P(t, x_0, \varepsilon) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x_0, 0) + \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t}(t, x_0, 0) &= f(\Phi(t, x_0, 0), 0) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(t, x_0, 0), 0) \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(t, x_0, 0) \\ &\quad + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\Phi(t, x_0, 0), 0) + \varepsilon^2 H(t, x_0, \varepsilon). \end{aligned}$$

On dérive cette équation par rapport à  $\varepsilon$  et on évalue en  $\varepsilon = 0$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon \partial t}(t, x_0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(t, x_0, 0), 0) \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(t, x_0, 0) + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\Phi(t, x_0, 0), 0)$$

Ainsi,  $\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(t, x_0, 0)$  est la solution de la nouvelle EDO

$$Y' = A(t)Y + B(t), \quad \text{où } A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\Phi(t, x_0, 0), 0) \text{ et } B(t) = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\Phi(t, x_0, 0), 0).$$

On appelle cette équation l'équation aux variations de  $x' = f(x, \varepsilon)$ .  
De plus, notons que  $\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon}(0, x_0, 0) = 0$ , car  $\Phi(0, x_0, \varepsilon) = x_0$ .

Ex.  $x'' = -g + \varepsilon x'$  pour  $\varepsilon \ll 1$  (beaucoup plus petit que 1).

En  $\varepsilon = 0$ , on a  $x'' = -g$ , donc  $x_0(t) := \frac{-gt^2}{2} + Ct + D$

Pour  $\varepsilon$  petit, une solution  $x_\varepsilon$  s'écrit

$$x_\varepsilon = x_0 + \varepsilon y_0 + \varepsilon^2 R(t, \varepsilon), \quad \text{où } y_0 = \left. \frac{\partial x_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}.$$

En remplaçant dans l'EDO, on a

$$x_0'' + \varepsilon y_0' = -g + \varepsilon x_0' = -g + \varepsilon x_0' + \varepsilon^2 H(t, \varepsilon)$$

On compare les termes degré par degré, ce qui donne

$$y_0'' = x_0' = -gt + C \Rightarrow y_0 = -\frac{gt^3}{6} + \frac{Ct^2}{2} + Dt + E.$$

On a  $y_0(0) = y_0'(0) = 0$ , donc  $y_0(t) = -\frac{gt^3}{6} + \frac{Ct^2}{2}$ .

Ainsi, une solution  $x_\varepsilon$  a la forme

$$\begin{aligned} x_\varepsilon(t) &= x_0(t) + \varepsilon y_0(t) + \varepsilon^2 R(t, \varepsilon) \\ &= \frac{-gt^2}{2} + Ct + D + \varepsilon \left( -\frac{gt^3}{6} + \frac{Ct^2}{2} \right) + \varepsilon^2 R(t, \varepsilon). \end{aligned}$$

Si  $\varepsilon$  est très petit, alors le terme  $\varepsilon^2 R(t, \varepsilon)$  très très petit.

### §3.9. Théorème de Poincaré-Bendixson.

On effectue une analyse qualitative approfondi des orbites dans le plan.

**Def.** Soit  $u \in U$  tel que  $\Phi(\cdot, u)$  est défini sur  $(a, \infty)$ . L'ensemble  $\omega$ -limite de  $u$ , noté  $\omega(u)$ , est

$$\omega(u) = \bigcap_{t_0 > 0} \overline{\{\Phi(t, u) \mid t > t_0\}} = \{z \in U \mid \exists (t_n), t_n \rightarrow \infty, \Phi(t_n, u) \rightarrow z\}$$

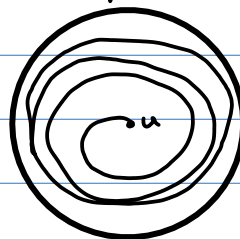
C'est là où  $\Phi(t, u)$  "se termine".

**Remarque** Si  $\omega(u)$  est borné, alors  $\omega(u)$  est compact et connexe.

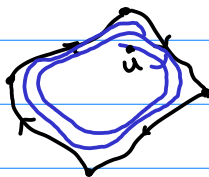
Ex.



$$\omega(u) = z_1$$



$\omega(u) = \text{cycle limite}$



$\omega(u) = \text{quatre orbites noires et les quatre coins.}$

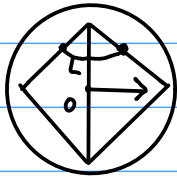
Le théorème de Poincaré-Bendixson donne une liste des possibilités de  $\omega(u)$  dans le cas de  $\mathbb{R}^2$ .

Pour cette section, on considère  $y' = f(y)$  et le plan le plan de phase  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  (ouvert). On suppose que

- $f$  est de classe  $C^1$
- les points d'équilibre sont isolés.

Soit  $u \in U$  un point régulier ( $u \in U$ ). Pour effectuer un changement de coordonnées, on suppose que  $u = 0$  et  $f(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ , où  $a > 0$ .

**Lemme 1** Pour tout  $z_0$  dans le losange  $D$ ,

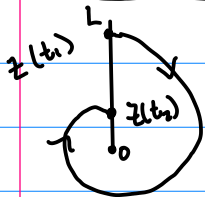


il existe un fragment d'orbite de  $z_0$  qui

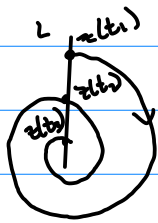
- est contenu dans  $D$
- intersecte  $L$ .

[Si le disque est assez petit, alors  $f_1(z) > \frac{\alpha}{2}$ , donc  $\Phi(t, z)$  doit traverser le disque en temps fini.]

**Lemme 2** Soit  $z$  une solution de  $z' = f(z)$ .



Si  $z$  coupe  $L$  en  $t_1 < t_2 < t_3$  et si  $z(t_1), z(t_2), z(t_3)$  sont distincts, alors  $z(t_2)$  est entre  $z(t_1)$  et  $z(t_3)$  sur  $L$ .

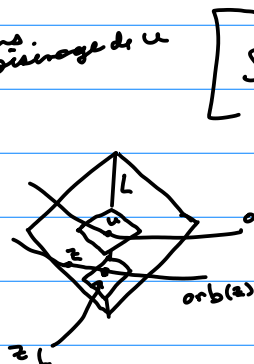
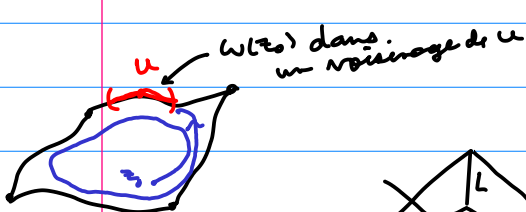


[Soit  $C'$  le segment d'orbite  $\{z(t) \mid t \in [t_1, t_2]\}$ . Alors  $L$  et  $C'$  forment une région fermée et  $z(t)$  pénètre dans celle-ci après  $t_2$ . Si  $z(t)$  s'échappe,

alors elle croise  $L$ , mais cela contredit le fait que  $f_1(z) > 0$ , ou elle croise  $C'$ , mais cela est impossible. Donc  $z(t)$  ne s'échappe pas.]

[Le cas se ramène au premier en inversant le temps.]

**Lemme 3** Soit  $z_0 \in U$  un point régulier ( $f(z_0) \neq 0$ ). Si  $U \in \omega(z_0)$  est régulier, alors dans un voisinage de  $u$ ,  $\omega(z_0)$  est un fragment d'orbite.



[Soit  $z \in \omega(z_0)$  et dans un losange comme au lemme 1. Supposons que  $z \notin \text{orb}(u)$ . Par le lemme 1, il existe  $z_L = \Phi(t_L, z) \in L$ . Puisque  $z_L \neq u$ , il existe deux petits losanges qui séparent  $z_L$  et  $u$  resp.  $D_1, D_2$

Puisque  $z_L \in \text{orb}(z)$  et que  $z \in \omega(z_0)$ , on a  $z_L \in \omega(z_0)$ . Ainsi,  $\Phi(t_n, z_0) \rightarrow z_L$  pour  $(t_n)$  et  $\Phi(s_n, z_0) \rightarrow u$  pour  $(s_n)$ . Il existe donc  $a_1 < a_2 < a_3$  tels que  $\Phi(a_1, z_0) \in D_1$ ,

$\Phi(a_2, z_0) \in D_2$  et  $\Phi(a_3, z_0) \in D_1$ , ce qui contredit le lemme 2. ]

**Lemme 4** Si  $z_0 \in \omega(z_0)$ , alors

- ou bien  $z_0$  est régulier ( $f(z_0) \neq 0$ ) et son orbite est périodique;
- ou bien  $z_0$  est un point d'équilibre ( $f(z_0) = 0$ ).

[ Si  $z_0$  est régulier, alors il existe  $(t_n)$ ,  $t_n \rightarrow \infty$  et  $\Phi(t_n, z_0) \rightarrow z_0$ .  
Comme  $\Phi(t_n, z_0)$  est monotone sur  $L$ , on a  $\Phi(t_n, z_0) = z_0$ , d'où  $\Phi(t, z_0)$  est périodique. ]

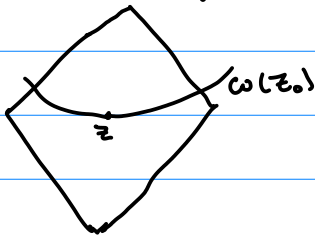
**Lemme 5** Si  $u \in \omega(z_0)$  et si  $\omega(u)$  contient un point régulier, alors  $\text{orb}(u)$  est périodique.

[ Soit  $z \in \omega(u)$  régulier.  $u$  est nécessairement régulier, sinon  $\omega(u) = u$ .  
On a

$$u \in \omega(z_0) \text{ et } z \in \omega(u) \Rightarrow z \in \omega(z_0)$$

$$u \in \omega(z_0) \Rightarrow \text{orb}(u) \subseteq \omega(z_0).$$

D'après le lemme 3,  $z$  est régulier, donc  $\omega(z_0)$  est un fragment d'orbite dans un voisinage de  $z$ .

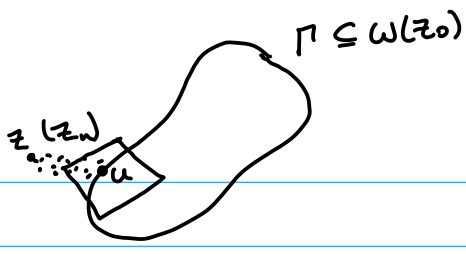


Puisque  $z \in \omega(u)$ , il existe  $y \in \text{orb}(u)$  arbitrairement proche de  $z$ , donc  $y$  est dans le voisinage. Comme  $\text{orb}(u) \subseteq \omega(z_0)$ , on a  $y \in \omega(z_0)$  et dans le voisinage, donc  $y \in \text{orb}(z)$ . Puisque  $\text{orb}(u) \cap \text{orb}(z) \neq \emptyset$ , on a  $\text{orb}(u) = \text{orb}(z)$ . Par le lemme 4,  $\text{orb}(u)$  est périodique. ]

**Lemme 6** Soit  $z_0$  tel que  $\text{orb}(z_0)$  est borné. Si  $\omega(z_0)$  contient une orbite périodique, alors  $\omega(z_0)$  est exactement cette orbite.

[ Rappel:  $\omega(z_0)$  est borné, donc  $\omega(z_0)$  est compact et connexe.

Soit  $\Gamma$  une orbite périodique dans  $\omega(z_0)$  et soit  $z \in \omega(z_0)$ .



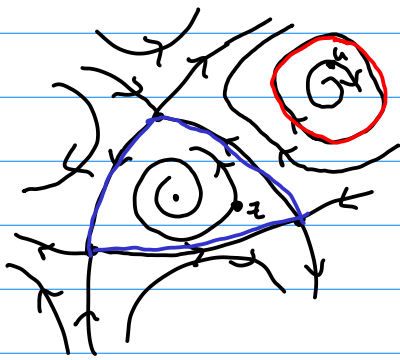
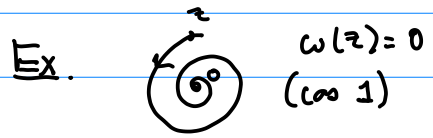
$\exists (z_n)$  telle que (car  $\omega(z_0)$  est connexe)  
 $z_{n_k} \rightarrow u \in \Gamma$

$u$  est régulier, donc  $\omega(z_0)$  est un fragment d'orbite dans un voisinage de  $u$ , mais on  $z_{n_k} \in \omega(z_0)$  dans un voisinage de  $u$  ✖ ]

**Théorème** (de Poincaré-Bendixson)

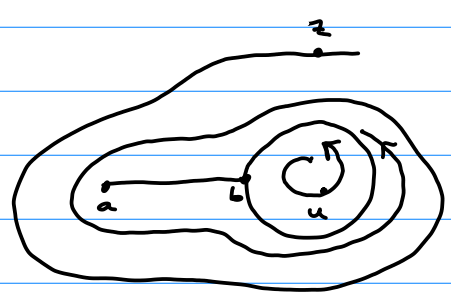
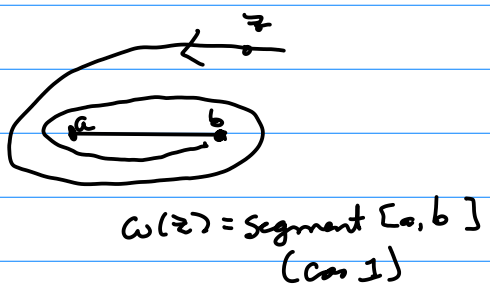
Soit l'EDO  $y' = f(y)$ , où  $f$  est de classe  $C^1$ , et  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  ouvert l'espace de phase. Soit  $z_0 \in U$ . Si  $orb^+(z_0)$  est borné, alors il existe exactement trois possibilités mutuellement exclusives pour  $\omega(z_0)$ :

1.  $\omega(z_0)$  est formé de points d'équilibre;
2.  $\omega(z_0)$  contient un point régulier et chacun de ses points admet pour ensemble limite un point d'équilibre.
3.  $\omega(z_0)$  est une orbite périodique propre (non réduite à un point).



$\omega(z) =$  les trois orbites en bleu et les coins (cas 2)

$\omega(u) =$  le cycle limite en rouge. (cas 3)



$\omega(z) = [a, b] \cup$  cercle (cas 2)

$\omega(u) =$  cercle  $\cup \{a\}$  (cas 2)

Exercice: Combiner les lemmes pour obtenir le théorème.