Chapitre 2 Systèmes linéaires

On note Mat$(n\times m)$ l'ensemble des matrices $n\times m$ à coefficients réels.

Les matrices $n\times m$ forment un espace vectoriel de dimension nm. La structure de produit les différencie de $\mathbb{R}^{nm}$.

§2.1 Norme matricielle

Déf. Soit V un espace vectoriel de dimension n.

1) On définit la norme euclidienne de $X=(X_1,\dots,X_n)\in V$

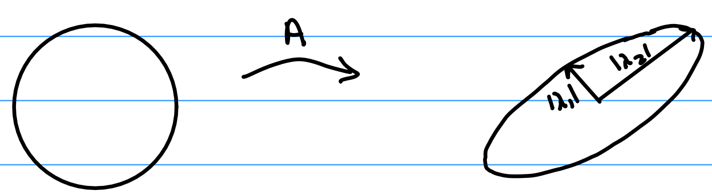
$$\|X\| = \Big(\sum_{k=1}^{n} X_k^2\Big)^{1/2}.$$

2) On définit la norme matricielle de $A\in \mathrm{Mat}(V)$ par

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\|.$$

La norme de X est la longueur du segment entre le point $\vec{0}$ et X.
La norme de A représente le plus grand coefficient de dilation de A.

Ex. Si $A \in \mathrm{Mat}(2\times 2)$ a deux valeurs propres réelles $|\lambda_1|<|\lambda_2|$, alors A envoie les cercles centrés à l'origine sur des ellipses



On a alors $\|A\| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = |\lambda_2|$.

Prop Soit $A, B\in \mathrm{Mat}(n\times n)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors $\|\cdot\|$ satisfait à

1) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$
2) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (Inégalité triangulaire)
3) $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$
4) $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Ainsi, $\|\cdot\|$ est une bonne façon de mesurer les distances.

Une norme permet de définir la limite.

Déf Soit (A_n) une suite de matrice de $\mathrm{Mat}(n\times n)$.

On dit (A_n) <u>converge vers A</u> $\in \mathrm{Mat}(n\times n)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Dans ce cas, on écrit $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

Prop Soit (A_n) une suite de matrice de $\mathrm{Mat}(n\times n)$, où $(a_{ij}^{(n)}) = A_n$ et $A = (a_{ij})$. Alors $A_n \to A$ $(n\to\infty)$ ssi

$$\lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij} \quad (\text{dans } \mathbb{R}) \quad \forall i,j.$$

<u>Ex</u>. $A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{\sin n}{n} \\ \frac{n}{n+1} & \sqrt[n]{n} \end{pmatrix}$ converge vers $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, car

$\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{\sin n}{n} \to 0$, $\frac{n}{n+1} \to 1$ et $\sqrt[n]{n} \to 1$ (analyse 1).

Puisque que la somme de matrices et la limite sont bien définies, on peut définir une série de matrices.

Déf 1. Soit $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathrm{Mat}(n\times n)$. On dit que la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ \underline{converge} si } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k \text{ existe.}$$

2. Si $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$ converge (dans $\mathbb{R}$), on dit que la série $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ est <u>absolument convergente</u>.

Théorème Si $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

[Cela est vrai puisque $(\mathrm{Mat}(n\times n), \|\cdot\|)$ est complet]

Ex. Soit $A \in \mathrm{Mat}(n\times n)$ une matrice telle que $\|A\| < 1$.
Soit $s_n = I + A + A^2 + \cdots + A^n$ une suite de sommes partielles.
On a

$$s_n - A s_n = I - A^{n+1}$$
$$s_n(I - A) = I - A^{n+1}$$

On a que $A^{n+1} \to \vec{0}$, car $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0$ (dans $\mathbb{R}$), donc $\lim_{n\to\infty} s_n$ converge et vaut

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n = (I-A)^{-1}.$$

C'est une généralisation des séries géométriques.

Il y a plusieurs normes possibles sur $\mathrm{Mat}(n\times n)$.
Y a-t-il une importance sur le choix de norme?

Théorème Toutes les normes sur $\mathrm{Mat}(n\times n)$ sont équivalentes.

Dém. Voir Analyse 3.

Autrement dit, on peut travailler avec $\|A\| = \max_{\|v\|=1} \|Av\|$

sans perdre de généralité.

§2.2. Systèmes linéaires

Un système d'EDO linéaires à coefficients constants a la forme

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}\, y_1(x) + a_{12}\, y_2(x) + \cdots + a_{1n}\, y_n(x) + p_1(x) \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}\, y_1(x) + \qquad \cdots + a_{nn}\, y_n(x) + p_n(x) \end{cases}$$

avec $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ (x est une variable réelle indépendante).

<u>Note</u>: On utilisera souvent la lettre t pour la variable indépendante.

Si on pose

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n)$$

et $P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, alors le système devient

$$Y'(x) = A\, Y(x) + P(x),$$

où $Y'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$

Déf. Un <u>système d'EDO linéaire à n équations</u> est un système de la forme

$$Y'(x) = A(x)\, Y(x) + P(x),$$

où $Y: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $P: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et

$A(x) \in Mat(n \times n)$ pour tout $x \in I$.

1. Le système est à <u>coefficients constants</u> si A ne dépend pas de x $(A(x) = A \ \forall x \in I)$.
2. Le système est <u>homogène</u> si $P(x) = 0 \ \forall x \in I$.
3. Le système est <u>inhomogène</u> si $P(x) \neq 0$.

<u>Remarque</u> Un système homogène et à coefficients constants fait partie des systèmes dits <u>autonomes</u>. On étudiera ces systèmes plus tard.

<u>Ex</u> 1. $\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases}$ correspond au système

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

On voit que l'on peut résoudre par séparation de variables :

$$y_1' = y_1 \Rightarrow \int \frac{dy_1}{y_1} = \int dx \Rightarrow \log|y_1| = x + C_1$$

$$\Rightarrow y_1 = D_1 e^{x}$$

$$y_2' = 2y_2 \Rightarrow \int \frac{dy_2}{y_2} = 2\int dx = \log|y_2| = 2x + C_2$$

$$\Rightarrow y_2 = D_2 e^{2x}$$

La solution est donc

$$Y(x) = \begin{pmatrix} c_1 e^{x} \\ c_2 e^{2x} \end{pmatrix}$$

(2) $\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_2 \end{cases}$ devient $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} Y$

On peut résoudre la première équation

$y_1' = y_1 \Rightarrow y_1 = C_1 e^x.$

Cependant, on ne sait pas encore résoudre

$\begin{cases} y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_2 \end{cases}$

Morale Si la matrice est diagonale, alors le système est facile à résoudre. $-A_3 = B_2$ $B_3 = A_2$

Ex. Diagonalisation.

Soit le système $Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}}_{A} Y = AY$

1. valeurs propres : $\det(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 6 & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$= -10 - 3\lambda + \lambda^2 + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$

Deux valeurs propres réelles distinctes $\Rightarrow$ A est diago.

2. vecteurs propres :

$A - I = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc $-3x - 2y = 0$

$3x = -2y$

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -3x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$-4x - 2y = 0$

$2x = -y$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage, donc

$D = P^{-1} A P$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. Résoudre le système :

$$Y' = AY \Rightarrow P^{-1}Y' = P^{-1}AY = P^{-1}APP^{-1}Y$$

$$\Rightarrow Z' = DZ, \text{ où } Z = P^{-1}Y$$

On sait que $Z = \begin{pmatrix} C_1 e^{x} \\ C_2 e^{2x} \end{pmatrix}$,

et donc $Y = PZ = \begin{pmatrix} 2C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} \\ -3C_1 e^{x} - 2C_2 e^{2x} \end{pmatrix}$

Vérif

$$Y' = \begin{pmatrix} 2e^{x} + 2e^{2x} \\ -3e^{x} - 4e^{x} \end{pmatrix}$$

✓

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} -4e^{x} - 2e^{2x} + 6e^{x} + 4e^{2x} \\ 12e^{x} + 6e^{2x} - 15e^{x} - 10e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{x} + 2e^{2x} \\ -3e^{x} - 4e^{x} \end{pmatrix}$$

Démarche si A est diago. et à coefficients constants:

1. Trouver les valeurs propres
2. Trouver une base de vecteurs propres. Construire P de sorte que $D = P^{-1}AP$, où D est diago.
3. Résoudre $Z' = DZ$, où $Z = P^{-1}Y$.
4. Calculer $Y = PZ$.

On reviendra plus tard au calcul des solutions.

Théorème Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $A : I \to \mathrm{Mat}(n \times n)$ et $P : I \to \mathbb{R}^n$ deux applications. Si A et P sont continues, alors pour tout $x_0 \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = A(x)Y + P(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}$$

possède une unique solution $Y : I^\circ \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

Dém. C'est la même démonstration que le théorème d'existence et d'unicité globale, mais elle est trop avancée pour le cours. □

Remarques ① Dans un cours d'analyse, on montre que $A = (a_{ij})$ continue sur I si et seulement si a_{ij} est continue sur I $\forall\, 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n$.

Par exemple, $A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sqrt{x} \\ \frac{1}{x-1} & 0 \end{pmatrix}$ est continue sur $(0,1) \cup (1,\infty)$.

② Si A est à coefficients constants (c-à-d. $A(x) = A\ \forall x \in I$), alors les solutions de l'équation homogène sont définies sur $\mathbb{R}$.

§2.2.1 Indépendance linéaire

Déf Soit $f_1, \dots, f_n : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des fonctions. On dit qu'elles sont <u>linéairement indépendantes</u> si pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, si

$$\lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_n f_n(x) = 0 \quad \forall x \in I,$$

alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Lemme Soit un système $Y' = A(x) Y$, où $A(x) \in \mathrm{Mat}(n \times n)$. L'ensemble

$$E = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ de classe } C^1 \text{ et } f'(x) = A f(x) \}$$

forme un espace vectoriel de dimension n.

Esquisse de la démonstration.

Soit $f_j = \begin{pmatrix} f_{1j} \\ \vdots \\ f_{nj} \end{pmatrix}$ la solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} f_j'(x) = A(x) f(x) \\ f_{1j}(0) = 0 \\ \vdots \\ f_{jj}(0) = 1 \\ \vdots \\ f_{nj}(0) = 0 \end{cases}$$

On montre comme pour les EDO linéaire d'ordre 2 que $\{f_1, \dots, f_n\}$ forme une base de E. $\square$

Pour déterminer l'indépendance linéaire, on utilise encore le Wronskien.

Déf. Soit $Y' = AY$, $A \in Mat(n \times n)$, une EDO. Soit $Y_1, \dots, Y_n$ des solutions de l'EDO. On définit leur <u>Wronskien</u> par

$$W(Y_1, \dots, Y_n)(x) = \det\left(Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)\right),$$

où $(Y_1(x), \dots Y_n(x))$ est la matrice dont la j^e colonne est $Y_j(x)$.

Si $Y_j = \begin{pmatrix} Y_{1j} \\ \vdots \\ Y_{nj} \end{pmatrix}$, alors $(Y_1, \dots, Y_n) = (Y_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$.

Lemme Soit $Y_1, \dots, Y_n$ des solutions de l'EDO $Y' = A(x)Y$. Elles sont linéairement dépendantes si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $W(Y_1, \dots, Y_n)(x) = 0$.

<u>Dém.</u>

C'est la même démo. que pour l'EDO linéaire d'ordre 2. On ne la répetera pas en classe.

$\Rightarrow$) Le déterminant est toujours nul si $Y_1, \dots, Y_n$ sont linéairement dépendantes.

$\Leftarrow$) Il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ et $1 \leq j \leq n$ tels que $Y_j(x_0) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \alpha(x_0) Y_k(x_0)$, où $\alpha(x_0)$ est une constante. On pose $Z(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \alpha(x_0) Y_k(x)$. On voit donc que Z et Y_j sont deux solutions de

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(x_0) = Z_0 \end{cases}$$

Par le théorème d'existence et d'unicité, on a
$Y_j(x) = Z(x) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} \alpha(x_0)\, Y_j(x) \quad \forall x$, d'où $Y_1, \dots, Y_n$ sont lin. dép. $\square$

Remarque Le lemme se réécrit
$Y_1, \dots, Y_n$ sont linéairement indépendantes $\Leftrightarrow \exists x,\ W(Y_1, \dots, Y_n) \neq 0$.

On peut montrer un résultat plus fort sur le Wronskien, mais les calculs sont beaucoup plus pénible.

Théorème Si $Y_1, \dots, Y_n$ sont n solutions de $Y' = A(x)Y$, $A(x) \in Mat(n\times n)$, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$W(Y_1, \dots, Y_n)(x) = C \exp\left(\int_0^x tr(A(s))\,ds \right)$$

Esquisse de démonstration
On pose $\Phi = (Y_1, \dots, Y_n)$. On notera également Φ par

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix},$$ où Φ_j est la j^e ligne de Φ.

En dérivant la formule du déterminant, on peut obtenir

$$\frac{d}{dx} \det(\Phi(x)) = \sum_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_j' \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix}$$

En utilisant le fait que $Y_1, \dots, Y_n$ sont des solutions, on arrive à montrer que

$$\det \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_j' \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ a_{j,j} \Phi_j \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} = a_{jj} \det(\Phi) \ , \text{ où } A = (a_{ij})$$

Ainsi, on obtient

$$(\det \Phi)' = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} \det(\Phi) = (\operatorname{Tr} A) \det \Phi$$

La solution de cette EDO est $\det \Phi = C \exp\left(\int_0^x \operatorname{tr} \Phi(s)\, ds\right)$. $\square$

Lemme (Principe de superposition) Soit Y_p une solution particulière de l'EDO $Y' = A(x) Y + P(x)$ et $Y_1, \dots, Y_n$ des solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène $Y' = A(x) Y$. Alors la solution générale de l'EDO inhomogène $Y' = A(x) Y + P(x)$ est $Y = Y_h + Y_p$, où $Y_h = C_1 Y_1 + \dots + C_n Y_n$.

Dém.

Pareil que pour les EDO d'ordre 1. On ne le fera pas en classe.

On vérifie aisément que si Z_1 et Z_2 sont deux solutions de $Y' = A(x) Y + P(x)$, alors $Z = Z_1 - Z_2$ est solution de $Y' = A(x) Y$. Ainsi, $Z_j = Y_j + Y_p$ sont n solutions linéairement indépendantes de de l'EDO. $\square$

Ex. $Y_1 = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$ sont solutions de

$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y$. On a $W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Donc Y_1 et Y_2 sont linéairement indépendants.

La solution générale est $Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Ex. $Y_1 = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x \end{pmatrix}$ sont deux solutions de

$$Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y \Leftrightarrow \begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_2 \end{cases}$$

On voit que

$$W(Y_1, Y_2) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

d'où Y_1 et Y_2 sont linéairement indépendantes.

Ainsi, $Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2$ est la solution générale.

$$= \begin{pmatrix} C_1 e^x + C_2 xe^x \\ C_2 e^x \end{pmatrix}$$

En fait, on peut résoudre ce système directement. L'équation 2 est $y_2' = y_2$ et se résout par séparation de variables. On trouve $y_2 = C_2 e^x$. On remplace dans l'équation 1:

$y_1' = y_1 + y_2 = y_1 + C_2 e^x$. C'est une EDO linéaire inhomogène. La solution générale est $y_1 = C_1 e^x + C_2 xe^x$. (Ici, la constante C_2 est la même que dans le y_2).

et donc $y_1 = C_1 e^x + C_2 xe^x$
$y_2 = C_2 e^x$.

§2.2.2 Systèmes linéaires à coefficients constants

On sait résoudre le système $Y' = AY$ lorsque A est diagonalisable. Comment faire sinon? Dans le cas à une équation, la solution est $y = e^{\int p}$. On peut généraliser cela.

On sait qu'il existe n solutions $Y_1, \ldots, Y_n$ linéairement indépendantes. On pose $\Psi = (Y_1, \ldots, Y_n) \in Mat(n \times n)$ la matrice dont la j^e colonne est Y_j. Alors Ψ est la solution de l'EDO matricielle

$$\Psi' = A\Psi.$$

On s'attend à ce que e^{At} soit la solution.

Déf Soit $A \in Mat(n \times n)$. L'exponentielle de A, notée e^A ou $exp(A)$ est définie par

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \in Mat(n \times n).$$

Remarques ① La série converge pour toute $A \in Mat(n \times n)$, puisque la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!}$ converge dans $\mathbb{R}$.

② Les théorèmes de convergence d'analyse s'appliquent, puisque la série est uniformément convergente. Ainsi, on a la formule

$$\boxed{\frac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}.}$$

Ex ① $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par récurrence, on a $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, on obtient

$$e^A = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

② $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Dans ce cas, on a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix}$ et par recurrence, on a $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$. On obtient donc

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$$

③ $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$

On a $D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 & 0 \\ 0 & \beta^n & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^n \end{pmatrix}$ et $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \vec{0}$.

Par le binôme de Newton, on a

$$(Ax)^n = x^n (D+N)^n = x^n D^n + x^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$$

$$= x^n D^n + x^n n N D^{n-1} + x^n \overbrace{\frac{n!}{2!(n-2)!}}^{\frac{n(n-1)}{2}} N^2 D^{n-2} + 0$$

$$= \begin{pmatrix} (x\alpha)^n & 0 & 0 \\ 0 & (x\beta)^n & 0 \\ 0 & 0 & (x\gamma)^n \end{pmatrix} + xn \begin{pmatrix} 0 & (x\beta)^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & (x\gamma)^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + x^2 \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & (x\gamma)^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On trouve donc

$$e^{Ax} = \begin{pmatrix} e^{\alpha x} & x e^{\beta x} & x^2 e^{\gamma x}/2 \\ 0 & e^{\beta} & x e^{\gamma x} \\ 0 & 0 & e^{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Remarque Une matrice N qui est telle que $N^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ est dite <u>nilpotente</u>. Le truc de l'exemple ③ est très utile pour calculer e^A en général.

④ $A = \begin{pmatrix} 0 & -x \\ x & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix} = -A$,

$A^4 = AA^3 = -A^2 = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = xI$

On a

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n} I}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}A}{(2n+1)!}$$

$$= \cos x \, I + \sin x \, A$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

Remarque Il y a un isomorphisme entre les matrices $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ et les nombres complexes :

$$z = x + iy \longmapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $A = \begin{pmatrix} 0 & -y \\ y & 0 \end{pmatrix} \mapsto iy$, donc on a montré que $e^{iy} = \cos y + i \sin y$,

la fameuse identité d'Euler.

Suite de ④ : Si $B = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, alors $e^B = e^x \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$.

Il suffit d'écrire $A = xI + yA$ et utiliser le fait que $e^{xI + yA} = e^{xI} e^{A}$.

Attention !! En général, il est faux que $e^{A+B} = e^A e^B$

Ex Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Alors $A^2 = 0$, donc $e^A = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Ensuite, $B^2 = 0$, donc

$e^B = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $e^A e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On pose $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ et donc $C^3 = C$, $C^4 = I$, etc.

On trouve
$$e^C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C}{(2n+1)!}$$
$$= \cosh 1 \, I + \sinh 1 \, C$$
$$= \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix} \neq e^A e^B.$$

Qu'est-ce qui ne fonctionne pas? En fait, on voit que $e^{A+B} = e^{B+A}$, donc il faudrait qu'on aille $e^A e^B = e^B e^A$ et ce n'est pas le cas dans le contre-exemple. Voici ce qu'il faut.

Théorème Soit $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n)$. Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

Dém. On ne fera pas en classe (?), car elle nécessite au moins analyse 1.

Rappel $\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!(n-k)!}$

D'une part, on a

$$e^{(A+B)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k} A^k B^{n-k}}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k \, B^{n-k}}{k!\,(n-k)!}$$
$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) \quad \text{(Produit de Cauchy)}.$$
$$= e^A e^B.$$

Attention Lorsqu'on utilise le binôme de Newton, on a besoin de la commutativité de A et B.

$\square$

Ex. Si A est triangulaire supérieur, alors on peut écrire $A = D + N$, où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que $DN = ND$ et que N est nilpotente ($N^n = 0$), donc on peut calculer e^A comme à l'exemple 3.

On résume tout ce qu'on a vu sur l'exponentielle matrice, et plus encore, dans le théorème suivant.

Théorème (Propriétés de l'exponentielle matricielle)

1) Pour toute $A \in Mat(n \times n)$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{Ax}$ est bien définie et de classe C^∞. De plus, on a $f'(x) = Ae^{Ax}$.
2) Si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$
3) Si $P \in Mat(n \times n)$ est inversible, alors $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$.
4) On a $\det(e^A) = e^{\operatorname{tr} A}$.
5) Si $D \in Mat(n \times n)$ est diagonale, alors

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad \text{où } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

6) Si A est triangulaire supérieure, alors $A = D + N$, où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

$DN = ND$ et $e^A = e^D e^N = e^D \left(I + N + \frac{N^2}{2} + \dots + \frac{N^n}{n!} \right)$.

6) Si $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, alors $e^A = e^x \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$.

Théorème Soit l'EDO $Y' = AY$, où $A \in Mat(n \times n)$.
La matrice exponentielle e^{Ax} est solution de l'équation matricielle $B' = AB$, où $A \in Mat(n \times n)$, $B(x) \in Mat(n \times n)$.
En particulier, chaque colonne de e^{Ax} est une solution de $Y' = AY$ et elles sont linéairement indépendantes.

Dém.

On a vu que $\frac{d}{dx} e^{Ax} = A e^{Ax}$. Ainsi, on voit que c'est une solution de $B' = AB$, avec $B = e^{Ax}$. Ensuite, on écrit

$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $B = (Y_1 \ \cdots \ Y_n)$, où v_j est la j^e ligne de A et Y_i est la i^e ligne de B. L'équation $B' = AB$ devient

$$(Y_1' \ \cdots \ Y_n') = AB = \begin{pmatrix} v_1Y_1 & v_1Y_2 & \cdots & v_1Y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_nY_1 & v_nY_2 & \cdots & v_nY_n \end{pmatrix}$$

donc $Y_1' = AY_1$, $\cdots$, $Y_n' = AY_n$. D'où chaque colonne de $B = e^{Ax}$ est une solution de l'EDO.

Enfin, on a $W(Y_1, \dots, Y_n) = W(e^{Ax}) = \det(e^{Ax}) = e^{tr(Ax)} \neq 0$ quelque soit A ou $x \in \mathbb{R}$. On conclut que $Y_1, \dots, Y_n$ sont lin. indép. $\square$

Ex. ① $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ C'est le système $Y' = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{A} Y$. On a vu

que $e^{Ax} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$. Ainsi,

la solution générale est $Y = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$

② $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = y \end{cases}$ c'est le système $Y' = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{A} Y$.

On a vu que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $(xA)^n = x^n \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a $e^{Ax} = I + \frac{1}{n!}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} x^n & nx^n \\ 0 & x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = xe^x$$

La solution générale est $Y = C_1 \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x \end{pmatrix}$.

Théorème Soit $A \in Mat(2\times 2)$ une matrice et λ_1, λ_2 ses valeurs propres. La solution générale du système de deux équations $Y' = AY$ est :

1. Si A est diagonalisable, alors
$$Y = C_1 e^{\lambda_1 x} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 x} v_2,$$ où v_1 et v_2 sont des v.p. de λ_1 et λ_2 resp.

2. Si λ_1 et λ_2 sont complexes, alors $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ et
$$Y = (C_1 \cos(\beta x) - C_2 \sin(\beta x))e^{\alpha x} v + (C_1 \sin(\beta x) + C_2 \cos(\beta x))e^{\alpha x} w$$
où $P = (v\ w)$ est telle que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

3. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ et A n'est pas diagonalisable, alors
$$Y = C_1 e^{\lambda x} v_1 + C_2 (xe^{\lambda x} v_1 + e^{\lambda x} w),$$ où $(A-\lambda I)v_1 = 0$, $(A-\lambda I)^2 v_2 = v_1$

On pourrait énoncer un théorème semblable pour les matrices 3×3, mais il serait très long. Cependant, traitons tout de même le cas d'une valeur propre multiple.

Ex. Soit le système $Y' = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}^{A} Y$ qui possède la valeur propre triple $\lambda = 1$.

On a déjà calculé e^A. On a $A = D + N$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$.

Ensuite, on a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$(xA)^n = x^n \left(D^n + n D^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} D^{n-2} N^2 \right)$$

$$\sum \frac{x^n D^n}{n!} = D \sum \frac{x^n}{n!} = e^x D = \begin{pmatrix} e^x & & 0 \\ & e^x & \\ 0 & & e^x \end{pmatrix}.$$

$$D^{n-1} N = DN = N \Rightarrow N \sum n \frac{x^n}{n!} = \begin{pmatrix} 0 & xe^x & 0 \\ & 0 & xe^x \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^{n-2} N^2 = DN^2 = N^2 \Rightarrow N \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n-1)x^n}{2 \cdot n!} = \frac{N}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x^2 e^x}{2} \\ & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

La solution est donc

$$Y = C_1 e^x e_1 + C_2 (x e^x e_1 + e^x e_2) + C_3 \left(\frac{x^2}{2} e^x e_1 + x e^x e_2 + e^x e_3 \right).$$

Théorème Si $A \in Mat(3 \times 3)$ a une valeur propre réelle λ de dimension géométrique 1 et dimension algébrique 3, alors il existe v_1, v_2, v_3 une base telle que

$$P^{-1} A P = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

où $P = (v_1 \; v_2 \; v_3)$ et $(A - \lambda I) v_1 = 0$, $(A - \lambda I)^2 v_2 = v_1$ et $(A - \lambda I)^3 v_3 = v_2$.

De plus, la solution générale de $Y' = AY$ est

$$Y = C_1 e^{\lambda x} v_1 + C_2 (x e^{\lambda x} v_1 + e^{\lambda x} v_2) + C_3 \left(\frac{x^2}{2} e^{\lambda x} v_1 + x e^{\lambda x} v_2 + e^{\lambda x} v_3 \right).$$

On étudie un lien entre les valeurs propres et les solutions.

Soit le système d'EDO $Y' = AY$, $A \in Mat(n \times n)$. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ des valeurs propres réelles ou complexes, où l'on répète les valeurs propres multiples. On note par $\Re\lambda_j$ la <u>partie réelle</u> de λ_j. (Si λ_j est réelle, alors $\Re\lambda_j = \lambda_j$. Si λ_j est imaginaire pure, alors $\Re\lambda_j = 0$.)

Si $\Re\lambda_j < 0$ pour tout j, alors les solutions Y_j de l'EDO vérifient

$$\lim_{x \to \infty} Y_j(x) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n.$$

On dit alors que $\vec{0}$ est un <u>point fixe stable</u> de l'EDO.
Si, au contraire, on a $\Re\lambda_j > 0$ pour tout j, on a

$$\lim_{x \to -\infty} Y_j(x) = \vec{0}.$$

On dit que $\vec{0}$ est un <u>point fixe instable</u> de l'EDO.

Attention, cela n'est pas la définition de stabilité. On y reviendra dans un contexte plus général.

§2.2.3 Portrait de phases.

Pour une EDO $Y' = AY$, l'<u>espace de phase</u> est l'ensemble des valeurs possibles de $y_1, \ldots, y_n$, donc $\mathbb{R}^n$ dans notre cas. (On y reviendra.)

Une solution Y est une fonction $Y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Ainsi, c'est une courbe dans $\mathbb{R}^n$. Le portrait de phase est l'ensemble de toutes les courbes de $\mathbb{R}^n$ solution de $Y' = AY$.

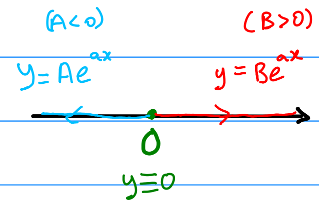
$y = Ae^{ax}$

$x \to \infty : y \to -\infty$

$x \to -\infty : y \to 0$

<u>Ex</u>. ① $y' = ay$ $(a>0)$ Espace de phase : $\mathbb{R}$

Portrait de phase :



Il y a trois courbes : $y_1(x) = Ae^{ax}$ $(A>0)$

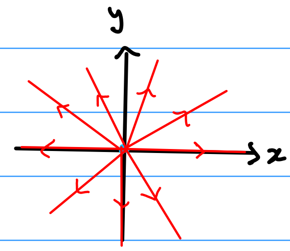
$y_2(x) = 0$ $(A=0)$

$y_3(x) = Ae^{ax}$ $(A<0)$.

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ diago

② $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ Espace de phase : $\mathbb{R}^2$

Portrait de phase :



$Y = C_1 e^t e_1 + C_2 e^t e_2$

Les courbes ont la forme

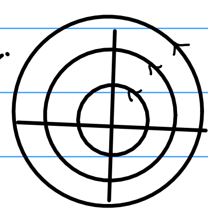
$y(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^t \end{pmatrix}$. Ce sont des droites de pente $\frac{C_2}{C_1}$.

On a aussi $y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda = \pm i$

③ $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ Solutions : $Y = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

Espace de phase.



Les courbes sont des cercles.

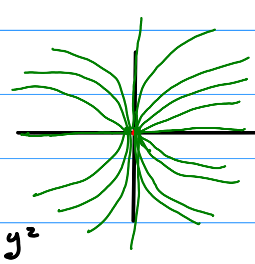
$\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = 1$

④ $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = y \end{cases}$

$Y = C_1 e^{2t} e_1 + C_2 e^t e_2$

$Y(t) = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 e^t \end{pmatrix}$

$x = C_1 e^{2t} = \frac{C_1}{C_2^2} (C_2 e^t)^2 = \frac{C_1}{C_2^2} y^2$

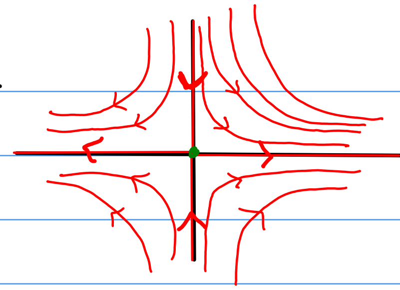


$C_1 = 0 : x = 0$, $y = C_2 e^t$

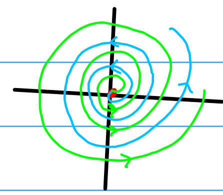
$C_2 = 0 : y = 0$, $x = C_1 e^{2t}$

$\lambda_1 > 0$
$\lambda_2 < 0$

⑤ $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -4y \end{cases}$ $\qquad Y = C_1 e^{2t} e_1 + C_2 e^{-4t} e_2$



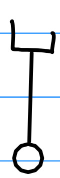
⑥ $Y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y \qquad \lambda = 1 + 2i \qquad Y = C_1 e^t \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$



C'est une spirale

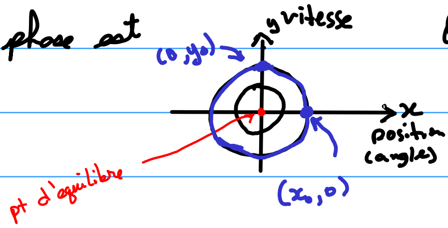
On peut voir que le portrait de phase est très différents selon le signe de la partie réelle des valeurs propres. Ainsi, si les signes des parties réelles des valeurs propres d'une matrice A sont pareils que ceux d'une matrice B, alors leur portrait de phase sera très similaire.

Ex. Les petites oscillations d'un pendule sont décrites par $x'' = -kx$.



repos.

Le portrait de phase est



On pose $y = x'$

$\begin{cases} x' = y \\ y' = -kx \end{cases} \qquad Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix}}_{A} Y$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + k$

$Y = C_1 \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k}x) \\ \sin(\sqrt{k}x) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin(\sqrt{k}x) \\ \cos(\sqrt{k}x) \end{pmatrix}$

Le point $(0,0)$ représente l'état de la pendule au repos.

Que représente les autres courbes? Ce sont tous les autres états du pendule. Par exemple, la courbe bleue correspond au mouvement du pendule lorsqu'il part de l'angle x_0 avec une vitesse 0.

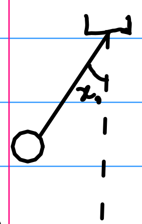
Mathématiquement, cet état correspond à la solution du PC

$$\begin{cases} x'' = -kx \\ x(0) = x_0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

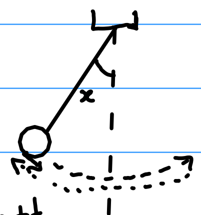
C'est aussi la solution du PC

$$\begin{cases} x'' = -kx \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = y_0 . \end{cases}$$

car $(x_0, 0)$ et $(0, y_0)$ sont sur la même courbe solution.

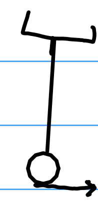


$t = 0$
vitesse $= 0$



$t = \Delta t$ petit.
vitesse = petit

Lorsque t augmente, la pendule se balance perpétuellement entre les angles $(-x_0, x_0)$.

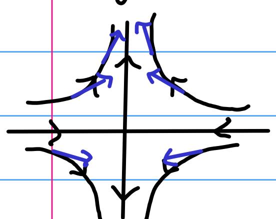


$t = 0$
$x = 0$
vitesse $= y_0$

On obtient le même mouvement que ci-haut, donc le même état.

Déf Un <u>champ de vecteurs</u> sur $\mathbb{R}^n$ est une application $\vec{v}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Regardons au portrait de phase de $Y' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$. $(*)$



Chaque courbe $Y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ est une solution de $(*)$.
Si on dérive, alors $Y' = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ est un vecteur tangent à Y au point $Y(t)$. On a

$$Y' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs du plan de phase qui a la propriété d'être tangent aux courbes solutions.

Proposition Si $Y' = AY$ est une EDO, alors $\vec{V}(\vec{X}) = A\vec{X}$ est un champ de vecteurs tangent aux courbes solutions de l'EDO.

Dem.

Si Y est une solution, alors $Y' = AY = \vec{V}(Y)$. $\square$

On peut se demander si, réciproquement, un champ de vecteurs donne une EDO.
La réponse est oui, mais cette EDO ne sera pas nécessairement linéaire.
On y reviendra plus tard.

§2.2.4 Classification des points singuliers simples sur le plan.

Déf On dit que $\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ est un point singulier ou une position d'équilibre de l'EDO $Y' = AY$ si $A\vec{X} = \vec{0}$ et si $\vec{X}$ est isolé des autres solutions de $A\vec{Z} = \vec{0}$.

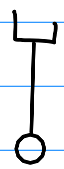
Pour une EDO linéaire homogène $Y' = A(x)Y$, $\vec{0}$ sera toujours un point fixe isolé, pourvu que $A(0)$ soit inversible.

Ex. Soit $Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A} Y$. Cette EDO n'a pas de point singulier puisque $A\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.

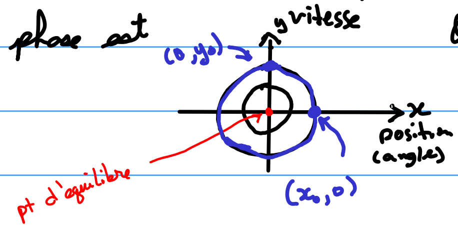
Ainsi, $\vec{0}$ n'est pas isolé des autres solutions de $A\vec{Z} = \vec{0}$.

Remarque Certains auteurs vont considérer $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ comme un point singulier. Dans ce cas, on parlera de point singulier dégénéré.

Ex. Les petites oscillations d'un pendule sont décrites par $x'' = -kx$.
La seule position d'équilibre est $x=0$, qui correspond à l'état du pendule au repos à l'angle 0 avec l'axe vertical négatif.



Le portrait de phase est



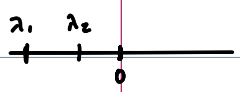
On pose $y = x'$

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -kx \end{cases} \qquad Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{pmatrix}}_{A} Y$$

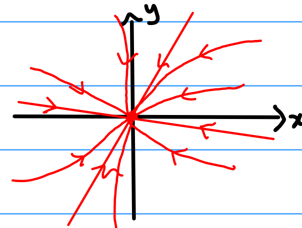
$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + k$$

$$Y = C_1 \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k}x) \\ \sin(\sqrt{k}x) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin(\sqrt{k}x) \\ \cos(\sqrt{k}x) \end{pmatrix}$$

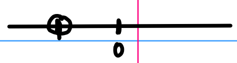
Les différents types de points singuliers dépendent des valeurs propres de A.



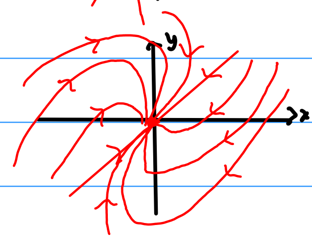
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$



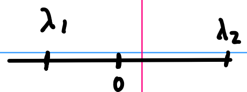
nœud stable



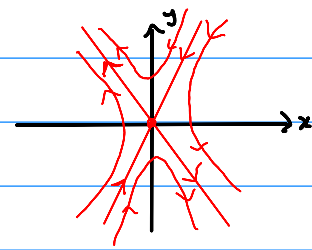
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$



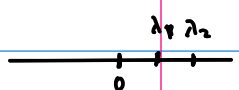
nœud stable (dégénéré)



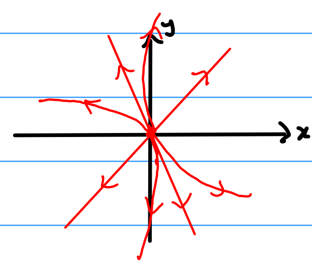
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



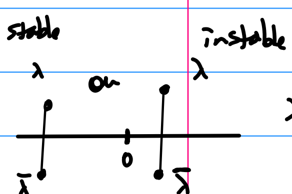
col



$0 < \lambda_1 < \lambda_2$

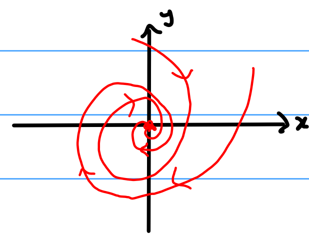


nœud instable

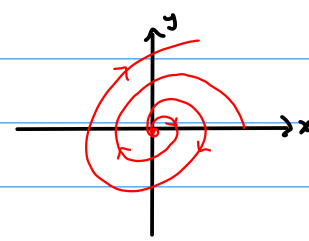


$\lambda = \alpha + i\beta,$

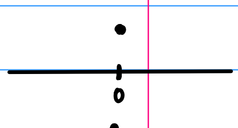
$\alpha \neq 0$



foyer stable

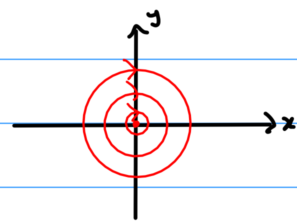


foyer instable

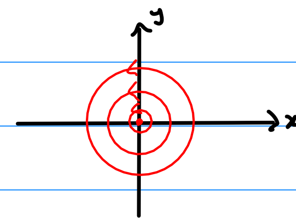


$\lambda = \alpha + i\beta$

$\alpha = 0$



$(\beta > 0)$



$(\beta < 0)$

Centre

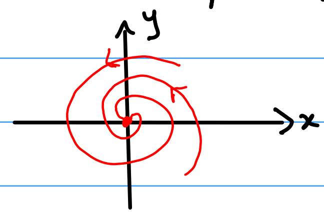
On voit que tous les cas dépendent de $\Re\lambda$.

Ex. Pendule avec frottement. $x'' = -x - kx'$, où kx' est le frottement $(k>0)$

On obtient le système $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - ky \end{cases} \Leftrightarrow Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix} Y.$

Valeurs propres : $-\lambda(-k-\lambda)+1 = \lambda^2 + k\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-4}}{2}$.

Si $k<2$, alors les valeurs propres sont complexes. La partie réelle de λ est $-\frac{k}{2} < 0$. On a donc



Si le frottement est petit $(k<2)$, alors on peut décrire tous les états possibles :

1. Le pendule est stationnaire (pt d'équilibre en $x=0, y=0$)
2. Sinon, le pendule oscille à l'infini, mais de moins en moins vite (y devient petit) et avec des oscillations de plus en plus petites (x devient plus petit).
   À la limite quand $t \to \infty$, le pendule atteint la position d'équilibre.

On a décrit les états du pendule de façon <u>qualitative</u> sans résoudre l'EDO. Ce point de vue sera très utile plus tard.

<u>Remarque</u> Cet exemple illustre d'où vient la terminologie d'un point d'équilibre stable. Le pendule se stabilise avec le temps, il s'approche de plus en plus de sa position d'équilibre

§2.2.5. Flot.

Soit l'EDO $Y' = AY$, où $A \in Mat(n \times n)$. Pour chaque $y \in \mathbb{R}^n$, soit $\varphi_y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ la solution au problème de Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} Y' = AY, \\ Y(0) = y. \end{cases} \qquad \text{(Autrement dit, } \varphi_y'(x) = AY \text{ et } \varphi_y(0) = y\text{)}$$

Pour $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on pose $\Phi(x,y) := \varphi_y(x)$. L'application ainsi définie s'appelle un *flot*.

Propriétés du flot:

1. Φ est bien définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
2. Φ est de classe C^∞.
4. $\Phi(0,y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.
3. $\Phi(s+t, y) = \Phi(s, \Phi(t,y))$.

Dém.

1 et 2 découlent du fait que l'on peut calculer les solutions explicitement. 3 suit du fait que $\Phi(0,y) = \varphi_y(0) = y$. (Voir déf. de φ_y ci-haut.)

4. Si $s=0$, on a $\Phi(s+t, y) = \Phi(t,y)$ et $\Phi(s, \Phi(t,y)) = \Phi(0, \Phi(t,y))$
$= \Phi(t,y)$.

De plus, on a $\frac{\partial}{\partial s} \Phi(s+t, y) = \frac{\partial}{\partial s} \varphi_y(s+t) = A\varphi_y(s+t) = A\Phi(s+t,y)$ et

$$\frac{\partial}{\partial s} \Phi(s, \Phi(t,y)) = \frac{\partial}{\partial s} \varphi_{\Phi(t,y)}(s) = A\varphi_{\Phi(t,y)}(s) = A\Phi(s, \Phi(t,y)).$$

Ainsi, ce sont deux solutions au problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t) = \Phi(t,y). \end{cases}$$

Par le théorème d'existence et d'unicité, on a $\Phi(s+t, y) = \Phi(s, \Phi(t,y))$. □

Notation On notera $\Phi(x,y)$ par $\Phi^x(y)$. Ainsi, le point 4 de la proposition devient $\Phi^{s+t}(y) = \Phi^s \circ \Phi^t(y)$, où $\circ$ est la composition par rapport à y.

Remarque (optionnelle) Pour chaque $x \in \mathbb{R}$ fixé, Φ^x est une application de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. L'ensemble $\{\Phi^x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}_{x \in \mathbb{R}}$ forme un groupe commutatif lorsque muni de la composition de fonction. On l'appelle un groupe à un paramètre. Le point 4 indique qu'il y a une compatibilité entre la structure de groupe du paramètre $(\mathbb{R}, +)$ et la structure de groupe de $\{\Phi^x\}_{x \in \mathbb{R}}$.

(optionnelle)

1. $\Phi^0 = id$
2. $\Phi^{-x} = (\Phi^x)^{-1}$, car $id = \Phi^{x-x} = \Phi^x \circ \Phi^{-x}$.
3. $(\Phi^x \circ \Phi^s) \circ \Phi^t = \Phi^x \circ (\Phi^s \circ \Phi^t) = \Phi^{x+s+t}$
4. $\Phi^s \circ \Phi^t = \Phi^{s+t} = \Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$.

Ex. Soit $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y'$. On a vu que la solution générale est
$Y = C_1 e^x e_1 + C_2 (xe^x e_1 + e^x e_2)$.

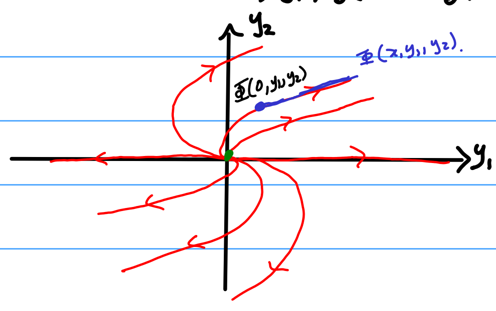
Pour chaque $\binom{y_1}{y_2} \in \mathbb{R}^2$, la solution de

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = \binom{y_1}{y_2} \end{cases}$$

est

$$Y(x) = y_1 e^x e_1 + y_2 (xe^x e_1 + e^x e_2).$$

Ainsi, le flot est $\Phi(x, y_1, y_2) = y_1 e^x e_1 + y_2 (xe^x e_1 + e^x e_2)$.



portrait de phase.

Pour $\binom{y_1}{y_2}$ fixé, $\Phi(x, y_1, y_2)$ est une particule qui part de $\binom{y_1}{y_2}$ en $x = 0$ et parcourt une courbe solution lorsque x augmente.