Équations différentielles

Devoir 4 (solutionnaire)

Hiver 2022

Le devoir est à remettre lundi le 11 avril au début du cours. Vous devez me remettre le devoir en papier. Il est recommandé de taper le devoir à l'ordinateur et de l'imprimer.

Si toutefois vous l'écrivez à la main, alors suivez ces consignes : écrivez **très propre, à double interligne et recto seulement**, écrivez sur du papier blanc ou ligné, mais pas quadrillé. Si votre devoir n'est pas assez propre, je ne le prendrai pas et vous aurez une journée pour le réécrire plus propre (et cette journée compte comme un retard).

Ce solutionnaire passe rapidement sur plusieurs détails; il sert à donner une idée de la réponse et non de modèle contre lequel se baser.

Exercice 1. Soit $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ et soit le système d'EDO

$$(\dagger) \qquad \begin{cases} x_1' = \omega_1 x_2, \\ x_2' = -\omega_1 x_1, \\ y_1' = \omega_2 y_2, \\ y_2' = -\omega_2 y_1. \end{cases}$$

Ne pas résoudre l'EDO.

a) Trouver trois intégrales premières non triviales et deux à deux linéairement indépendantes.

Solution. On pose $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$. On a

$$H_1(x,y) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2, \qquad H_2(x,y) = y_1^2 + y_2^2 = \|y\|^2, \qquad H_3(x,y) = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Il est clair qu'elles sont deux à deux linéairement indépendantes.

b) On considère un cercle dans le plan x_1x_2 et dans y_1y_2 :

$$S_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 4\} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \{(y_1, y_2) \mid y_1^2 + y_2^2 = 1\}.$$

On pose $T = S_1 \times S_2$ (un tore). En utilisant le a), montrer que T est un sous-ensemble invariant : si $(x_0, y_0) \in T$, alors $\Phi(t, x_0, y_0) \in T$ pour tout t, où Φ est le flot de $(\dagger)$.

Solution. On pose $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^4 \mid H_1(x,y) = 4\}$ et $E_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^4 \mid H_2(x,y) = 1\}$. Puisque que H_1 et H_2 sont des intégrales premières, une orbite qui part de $(x_0, y_0) \in E_j$ doit rester dans la surface de niveau. Ainsi, pour tout t, on a $\Phi(t, x_0, y_0) \in E_1 \cap E_2 = S_1 \times S_2$.

c) Le tore T se paramétrise à l'aide de deux angles $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ et de $x = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$ et $y = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Porter ce changement de variable dans $(\dagger)$ pour obtenir deux EDO pour (θ, φ). Tracer quelques solutions dans le carré $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

Solution. On substitue le changement de variables dans (†) :

$$\begin{cases} -2\theta' \sin\theta = \omega_1 2 \sin\theta, \\ 2\theta' \cos\theta = -\omega_1 2\cos\theta, \\ -\varphi' \sin\varphi = \omega_2 \sin\varphi, \\ \varphi' \cos\varphi = -\omega_2 \cos\varphi. \end{cases}$$

On en tire les deux équations

$$\begin{cases} \theta' = -\omega_1 \\ \varphi' = -\omega_2. \end{cases}$$

Les solutions sont simplement $\theta = -\omega_1 t + C$ et $\varphi = -\omega_2 t + D$. Dans le carré $[0, 2\pi)^2$, cela correspond à des droites obliques parallèles dont la pente dépend de ω_1 et de ω_2.

d) Le tore se représente dans $\mathbb{R}^3$ comme sur la figure 1 à l'aide du paramétrage $p\colon [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} (4 + \cos\theta)\cos\varphi \\ \sin\theta \\ (4 + \cos\theta)\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Dessiner quelques orbites obtenues au c) sur ce tore. (Il est permis (et beaucoup plus facile) de faire un dessin approximatif à la main.)

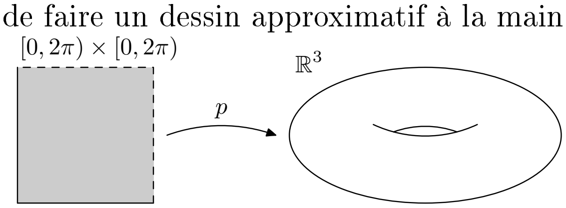

Figure 1. Tore dans $\mathbb{R}^3$. C'est la « coquille » d'un beigne (ou un beigne creux).

Exercice 2. Un modèle de population P acceptable est de supposer que les taux de naissance et de mortalité sont directement proportionnels à la taille de la population. Ensuite, le taux de croissance de la population est

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = (n - m)P.$$

Ce modèle est convenable lorsque la population n'est pas trop grande ou en admettant des hypothèses irréalistes, comme des ressources infinies à la portée.

a) On modélise une population P de dorés dans un lac. Étant donné les ressources limitées en nourriture, on suppose que le coefficient du taux de naissance, initialement $n_0 > m$, est une fonction affine[1] décroissante en terme de la taille de la population.

i) Modifier le modèle initial pour tenir compte de ce changement.

Solution. Le coefficient du taux de naissance est de la forme $n(P) = n_0 - kP$, où k est une constante positive. Ainsi, le modèle devient

$$P' = \big(n(P) - m\big)P = (n_0 - kP - m)P = k\left(\frac{n_0 - m}{k} - P\right)P.$$

[1] Les fonctions affines sont celles ayant la forme $f(x) = ax + b$.

ii) Montrer que peu importe la taille initiale P_0 de la population, la taille de population P tend vers une constante $M > 0$. Déterminer cette constante.

Solution. On voit que si $P_0 < \frac{n_0 - m}{k}$, alors $P' > 0$, donc P est croissante. Puisque $M := \frac{n_0 - m}{k}$ est le seule point singulier plus grand que 0, on doit avoir que $P(t) \to M$ lorsque $t \to \infty$. De façon semblable, si $P_0 > M$, alors $P' < 0$, donc P décroit et, à la limite, atteint M.

b) La pêche est maintenant permise dans le lac selon un certain quota. Soit $c > 0$ le taux constant de prélèvement (mesuré en nombre de poissons par unité de temps) de la population de dorés.

i) Modifier le modèle du a) pour prendre en compte se prélèvement.

Solution. On a simplement

$$P' = k\left(\tfrac{n_0 - m}{k} - P\right) P - c.$$

ii) Le village du coin ne veut pas que la population de dorés s'éteigne. À partir de quelle valeur de c la population est vouée à disparaître en temps fini et ce, peu importe la taille de la population initiale?

Solution. On pose $M = \frac{n_0 - m}{k}$. L'équation s'écrit

$$P' = k\,(M - P)\,P - c = -kP^2 + kMP - c.$$

C'est un polynôme de degré 2 en P dont le discriminant est $\Delta = k^2M^2 - 4kc$. On a que $\Delta > 0$ si et seulement si $c < \frac{kM^2}{4}$. Si $\Delta > 0$, alors l'EDO possède deux points d'équilibre $Q_\pm = \frac{1}{2}(M \pm \sqrt{M^2 - 4c/k})$, dont au moins un est positif. Dans ce cas, il est impossible que la population ne s'éteigne en temps fini pour toute condition initiale, car l'état initial Q_+ est un point d'équilibre et dans ce cas $P(t) = Q_+$ pour tout t.

Si on veut un argument plus complet, on peut déterminer le portrait de phases comme suit. On détermine si ces points sont stables. On pose $f(P) = -kP^2 + kMP - c$. On a

$$f'(P) = -2kP + kM$$

et donc

$$f'(Q_\pm) = \pm\sqrt{M^2 - 4c/k}.$$

On voit que Q_+ est stable, mais que Q_- est instable. Ainsi, si $c < \frac{kM^2}{4}$ et que la population est assez grande (au moins plus grande que Q_-), alors elle ne s'éteindra pas.

Si $c > \frac{kM^2}{4}$, alors l'EDO n'a pas de points d'équilibre. Dans ce cas, le portrait de phases sur la droite réelle est une orbite orientée vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. Puisque $f(0) = -c$, le champ de vecteur pointe vers $-\infty$, donc la population est vouée à s'éteindre peu importe sa taille initiale. Cela se produit en temps fini, puisque 0 n'est pas un point d'équilibre.

Si $c = \frac{kM^2}{4}$, alors le seul point d'équilibre est $Q = \frac{M}{2}$. Dans ce cas, on a $P' = -k(P - Q)^2$ et donc $f(P) < 0$ pour tout $P \neq 0$. Ainsi, le portrait de phases sur la droite est un point d'équilibre en $Q > 0$, une orbite allant de ∞ à Q et une autre orbite allant de Q à $-\infty$. Si la condition initiale est $P_0 > Q$, alors la population ne s'éteint pas en temps fini, elle converge vers Q.

c) Le brochet est introduit dans le lac. Il se nourrit des dorés, donc son taux de naissance est proportionnel au nombre de dorés mangés. Le nombre de dorés mangés est proportionnel au taux de rencontre entre les brochets et les dorés, que l'on suppose proportionnel au produit de leur population. On suppose que le taux de naissance des dorés est directement proportiel à sa population, que le taux de mortalité est directement proportionnel au nombre de dorés mangés et qu'il n'y a plus de prélèvement. Enfin, le taux de mortalité des brochets est directement proportionnel à sa population.

   i) Soit x la population de dorés et y la population de brochets. Donner un modèle de ce système. Il devrait y avoir deux équations, une pour chaque population. Indiquer le signe de chaque constante éventuelle. (Afin d'uniformiser, combinez les constantes jusqu'à en avoir au plus quatre et nommez-les a, b, c, d.)

Solution. On suit directement les contraintes. Le taux de naissance du doré est proportionnel à x et le taux de mortalité est proportionnel à xy. On obtient

$$x' = ax - bxy.$$

Ensuite, le taux de naissance du brochet est proportionnel à xy et le taux de mortalité est proportionnel à y. On obtient

$$y' = cxy - dy.$$

Cela nous donne le système.

   ii) Trouver tous les points d'équilibre du système obtenu en c)*i*) et pour chacun, déterminer le type de linéairisé (col, nœud, etc.).

Solution. C'est le même système qu'au devoir 3, donc la même solution.

   iii) Tracer le portrait de phases pour les $x, y \geq 0$. Interpréter les états en termes des populations. Les populations vont-elles s'éteindre ou perdurer?

   Attention. Si le linéarisé de l'un des points d'équilibre est un centre, alors il faut déterminer si c'est un centre ou un foyer faible dans le système de départ.
   Indice. Si le système que vous avez trouvé est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$, alors trouvez une intégrale première en résolvant $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$. Utilisez le fait que si $H\colon (x,y) \mapsto H(x,y)$ possède un maximum ou un minimum local en (x^*, y^*), alors ses courbes de niveau près de (x^*, y^*) sont fermées et simples.

Solution. En $(0,0)$, on a un col, donc cela ne cause pas de problème. Pour $(x_0, y_0) := \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$, le linéarisé est un centre, il faut donc déterminer si c'est un foyer faible ou un centre. L'indice suggère de trouver une intégrale première. On tente de résoudre

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{cxy - dy}{ax - bxy} = \frac{y(cx - d)}{x(a - by)}.$$

qui est une EDO à variable séparable. On a

$$\int \frac{a - by}{y} \mathrm{d}y = \int \frac{cx - d}{x} \mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad a \log|y| - by = cx - d \log|x| + D.$$

Notre intégrale première est donc $H(x,y) = a\log|y| - by + d\log|x| - cx$. Si on montre que H possède un extremum local en (x_0, y_0), alors on saura que le point singulier est un centre. D'abord, on a

$$\nabla H(x_0, y_0) = \left(\frac{d}{x} - c, \frac{a}{y} - b\right)\Big|_{(x_0,y_0)} = (0,0).$$

On calcule la matrice hessienne :

$$\mathrm{Hes}(H) = \begin{pmatrix} -\frac{d}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que Hes(H) possède deux valeurs propres négatives, donc le point critique est un maximum local.

Enfin, si la condition initiale est suffisamment proche du centre, alors les deux populations vont vivre en équilibre, puisque les orbites sont fermés. Ainsi, lorsque les proies diminuent, les prédateurs diminuent, donc les proies augmentent, ce qui cause une augmentation des prédateurs et ainsi de suite. La taille des deux populations oscille.