Équations différentielles

Devoir 4

Hiver 2022

Le devoir est à remettre lundi le 11 avril au début du cours. Vous devez me remettre le devoir en papier. Il est recommandé de taper le devoir à l'ordinateur et de l'imprimer.

Si toutefois vous l'écrivez à la main, alors suivez ces consignes : écrivez **très propre, à double interligne et recto seulement**, écrivez sur du papier blanc ou ligné, mais pas quadrillé. Si votre devoir n'est pas assez propre, je ne le prendrai pas et vous aurez une journée pour le réécrire plus propre (et cette journée compte comme un retard).

Exercice 1. Soit $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ et soit le système d'EDO

$$(\dagger) \qquad \begin{cases} x_1' = \omega_1 x_2, \\ x_2' = -\omega_1 x_1, \\ y_1' = \omega_2 y_2, \\ y_2' = -\omega_2 y_1. \end{cases}$$

Ne pas résoudre l'EDO.

a) Trouver trois intégrales premières non triviales et deux à deux linéairement indépendantes.

b) On considère un cercle dans le plan x_1x_2 et dans y_1y_2 :

$$S_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 4\} \qquad \text{et} \qquad S_2 = \{(y_1, y_2) \mid y_1^2 + y_2^2 = 1\}.$$

On pose $T = S_1 \times S_2$ (un tore). En utilisant le a), montrer que T est un sous-ensemble invariant : si $(x_0, y_0) \in T$, alors $\Phi(t, x_0, y_0) \in T$ pour tout t, où Φ est le flot de $(\dagger)$.

c) Le tore T se paramétrise à l'aide de deux angles $(\theta, \varphi) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ et de $x = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$ et $y = (\cos\varphi, \sin\varphi)$. Porter ce changement de variable dans $(\dagger)$ pour obtenir deux EDO pour (θ, φ). Tracer quelques solutions dans le carré $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$.

d) Le tore se représente dans $\mathbb{R}^3$ comme sur la figure 1 à l'aide du paramétrage $p\colon [0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$p(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} (4 + \cos\theta)\cos\varphi \\ \sin\theta \\ (4 + \cos\theta)\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Dessiner quelques orbites obtenues au c) sur ce tore. (Il est permis (et beaucoup plus facile) de faire un dessin approximatif à la main.)

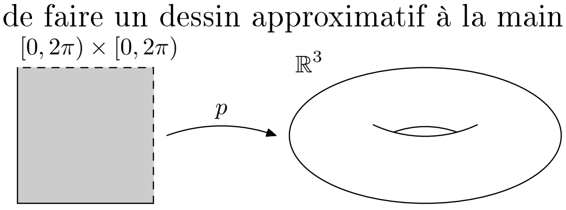

Figure 1. Tore dans $\mathbb{R}^3$. C'est la « coquille » d'un beigne (ou un beigne creux).

Exercice 2. Un modèle de population P acceptable est de supposer que les taux de naissance et de mortalité sont directement proportionnels à la taille de la population. Ensuite, le taux de croissance de la population est

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = (n-m)P.$$

Ce modèle est convenable lorsque la population n'est pas trop grande ou en admettant des hypothèses irréalistes, comme des ressources infinies à la portée.

a) On modélise une population P de dorés dans un lac. Étant donné les ressources limitées en nourriture, on suppose que le coefficient du taux de naissance, initialement $n_0 > m$, est une fonction affine[1] décroissante en terme de la taille de la population.

   i) Modifier le modèle initial pour tenir compte de ce changement.

   ii) Montrer que peu importe la taille initiale P_0 de la population, la taille de population P tend vers une constante $M > 0$. Déterminer cette constante.

b) La pêche est maintenant permise dans le lac selon un certain quota. Soit $c > 0$ le taux constant de prélèvement (mesuré en nombre de poissons par unité de temps) de la population de dorés.

   i) Modifier le modèle du a) pour prendre en compte se prélèvement.

   ii) Le village du coin ne veut pas que la population de dorés s'éteigne. À partir de quelle valeur de c la population est vouée à disparaître en temps fini et ce, peu importe la taille de la population initiale?

c) Le brochet est introduit dans le lac. Il se nourrit des dorés, donc son taux de naissance est proportionnel au nombre de dorés mangés. Le nombre de dorés mangés est proportionnel au taux de rencontre entre les brochets et les dorés, que l'on suppose proportionnel au produit de leur population. On suppose que le taux de naissance des dorés est directement proportiel à sa population, que le taux de mortalité est directement proportionnel au nombre de dorés mangés et qu'il n'y a plus de prélèvement. Enfin, le taux de mortalité des brochets est directement proportionnel à sa population.

   i) Soit x la population de dorés et y la population de brochets. Donner un modèle de ce système. Il devrait y avoir deux équations, une pour chaque population. Indiquer le signe de chaque constante éventuelle. (Afin d'uniformiser, combinez les constantes jusqu'à en avoir au plus quatre et nommez-les a, b, c, d.)

   ii) Trouver tous les points d'équilibre du système obtenu en c)*i*) et pour chacun, déterminer le type de linéairisé (col, nœud, etc.).

   iii) Tracer le portrait de phases pour les $x, y \geq 0$. Interpréter les états en termes des populations. Les populations vont-elles s'éteindre ou perdurer?

   Attention. Si le linéarisé de l'un des points d'équilibre est un centre, alors il faut déterminer si c'est un centre ou un foyer faible dans le système de départ.
   Indice. Si le système que vous avez trouvé est $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$, alors trouvez une intégrale première en résolvant $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$. Utilisez le fait que si $H\colon (x,y) \mapsto H(x,y)$ possède un maximum ou un minimum local en (x^*, y^*), alors ses courbes de niveau près de (x^*, y^*) sont fermées et simples.

[1] Les fonctions affines sont celles ayant la forme $f(x) = ax + b$.