Équations différentielles

Devoir 3 (solutionnaire)

Hiver 2022

Le devoir est à remettre lundi le 28 mars au début du cours. Vous devez me remettre le devoir en papier. Il est recommandé de taper le devoir à l'ordinateur et de l'imprimer.

Si toutefois vous l'écrivez à la main, alors suivez ces consignes : écrivez **très propre, à double interligne et recto seulement**, écrivez sur du papier blanc ou ligné, mais pas quadrillé. Si votre devoir n'est pas assez propre, je ne le prendrai pas et vous aurez une journée pour le réécrire plus propre (et cette journée compte comme un retard).

Ce solutionnaire passe rapidement sur plusieurs détails; il sert à donner une idée de la réponse et non de modèle contre lequel se baser.

Exercice 1. Soit $A \in \mathrm{Mat}(2\times 2)$. On considère le système d'EDO $Y' = AY$ et le champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = \binom{v_1(x,y)}{v_2(x,y)} = A\binom{x}{y}$ associé. Il est tangent à la courbe solution qui passe par (x,y) en ce point.

a) On définit $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to [0,2\pi]$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{si } x>0 \text{ et } y \geq 0,\\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x=0 \text{ et } y>0,\\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi, & \text{si } x<0\\ \frac{3\pi}{2}, & \text{si } x=0 \text{ et } y<0,\\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+2\pi, & \text{si } x>0 \text{ et } y<0. \end{cases}$$

C'est la fonction qui associe l'angle allant de l'axe des x positifs jusqu'à la droite passant par l'origine et (x,y), pourvu que (x,y) est non nul. On tient pour acquis que f est dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y=0\}$. Que représente $f\circ\vec{V}(x,y)$? Calculer $\nabla f(x,y)$ et exprimer $\nabla(f\circ\vec{V})(x,y)$ en terme de ∇f et de A.

Solution. C'est une longue question pour faire un petit calcul. On a

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

Ensuite, par la règle de dérivation en chaîne, puisque $dV = A$, on a $\nabla(f\circ V) = (\nabla f)(V)A$. Enfin, la composée $f\circ V$ est la fonction qui associe au point (x,y) l'angle du vecteur $V(x,y)$, mesuré à partir de l'axe horizontal positif.

b) Pour $r \in (0,\infty)$, on définit

$$n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f\circ\vec{V})(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta. \qquad (*)$$

Montrer[1] que $n(r)$ ne dépend pas de r, c'est-à-dire que $n(r) = n(1)$ pour tout r.
Suggestion. Vous pouvez faire le calcule explicite, mais il est probablement plus simple de montrer que $\vec{V}(rx, ry) = r\vec{V}(x, y)$ et que $\nabla f(rx, ry) = \frac{1}{r}\nabla f(x, y)$.

Solution. On pose $\vec{x} = (x, y)^T$. Il y a plus d'une façons de faire la démonstration. Si on suit la suggestion, alors on voit directement que $\nabla f(r\vec{x}) = \frac{1}{r}\nabla f(\vec{x})$ et que $V(r\vec{x}) = A(r\vec{x}) = rA\vec{x}$. Ensuite, on a simplement

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f \circ V)(r\vec{x}) = (\nabla f)\big(V(r\vec{x})\big)Ar\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\theta} = (\nabla f)\big(V(\vec{x})\big)A\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\theta}$$

Une autre façon plus simple (suggéré par Marc-Antoine) est de constater que $f(r\vec{x}) = f(\vec{x})$, donc c'est direct, en utilisant que $V(r\vec{x}) = rV(\vec{x})$.

La dernière façon (que je connaisse) est d'utiliser le théorème de Green. En effet, si γ_1 et γ_2 sont deux courbes fermés simples qui font le tour de l'origine dans le même sens, alors, par le théorème de Green, on a

$$\int_{\gamma_1 \cup -\gamma_2} \nabla(f \circ V)(\gamma)\mathrm{d}\gamma = 0,$$

d'où $\int_{\gamma_1} \nabla(f \circ V)(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} \nabla(f \circ V)(z)\mathrm{d}z$.

c) Calculer n pour les cas suivants :

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ii)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *iii)* $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution. C'est un calcul direct. On trouve *i)* 1, *ii)* -1, *iii)* 1.

d) On appelle n l'*indice* du point d'équilibre de A. Que représente ce nombre?

Solution. L'indice représente le nombre de tour que font les vecteurs du champ de vecteurs le long de la courbe.

Une façon imagée de l'interpréter est comme suit : un touriste fait un tour de la ville sur un siège pivotant et regarde le paysage dans ses jumelles. Le siège se déplace le long du cercle et le touriste tourne sur le siège afin de diriger son regard toujours dans la direction du champ de vecteurs. L'indice représente le nombre de tour que le touriste a fait *sur lui-même* après que le siège ait fait un circuit complet.

Remarque. La définition plus général de l'indice est

$$n(\gamma) = \int_\gamma \frac{v_2\mathrm{d}v_1 - v_1\mathrm{d}v_2}{v_1^2 + v_2^2},$$

mais comme les intégrales curvilignes ne sont pas prérequis, on se contentera de la formule $(*)$, que l'on obtient en prenant γ comme étant un cercle. On montre à l'aide du théorème de Green que $n(\gamma)$ ne dépend *essentiellement* pas de γ. On peut également montrer que n est toujours un entier[2].

---

[1] Il vous est permis de faire appel au théorème de Green, mais ce n'est pas nécessaire (et il faut faire attention!).

[2] Cela est simple à montrer à l'aide de l'analyse complexe. En effet, le calcul de n revient à calculer une intégrale de la forme $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$, qui donne toujours un entier par le théorème des résidus.

Exercice 2. On se rappelle du modèle physique $x'' = F(x)$ du devoir 1. Pour cet exercice, on prend F linéaire, donc $F(x) = kx$, où $k \in \mathbb{R}$. L'énergie totale est

$$E(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} - \int_0^{x_1} F(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

a) Tracer le portrait de phase de ce modèle dans le plan $x_1 x_2$ pour les cas $k > 0$ et $k < 0$.

Solution. On a

$$E(x_1, x_2) = \tfrac{x_2^2}{2} - k\tfrac{x_1^2}{2}.$$

Ainsi, si $k < 0$, le portrait de phases est constitué d'ellipses d'équation $\frac{x_2^2}{2} - k\frac{x_1^2}{2} = C$, $C \geq 0$. Si $k > 0$, alors le portrait de phases est rempli d'hyperboles de même équation, avec $C \in \mathbb{R}$.

b) Expliquer le lien entre le portrait de phase et l'énergie totale.

Solution. L'énergie totale est une intégrale première, donc les orbites de l'EDO sont contenues dans les courbes de niveau de E.

c) Dans le cas où $k < 0$, l'équation modélise[3] la charge dans un condensateur d'un circuit formé d'un condensateur et d'une bobine. Décrire les différents états du courant dans le circuit. (Si $x(t)$ est la charge au temps t, alors $x'(t)$ est le courant électrique au temps t.)

Solution. Comme les orbites sont des ellipses, cela signifie que le courant est alternatif, c'est-à-dire que son intensité oscille périodiquement, à moins que ce ne soit la position d'équilibre, auquel cas il n'y a pas de courant.

Remarque. Le concept physique d'énergie totale est un exemple d'*intégrale première*, qui est un concept mathématique. Les intégrales premières, lorsqu'elles existent, sont très utiles pour aider à comprendre la dynamique. Les considérations physiques d'un problème physique mènent souvent à des intégrales premières lorsque ce problème est modélisé par une EDO.

Exercice 3. Soit le système

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t), \\ y'(t) = \delta x(t)y(t) - \gamma y(t), \end{cases}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. C'est un système non linéaire. On pose

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta xy \\ \delta xy - \gamma y \end{pmatrix}.$$

a) Trouver les solutions de $f(x, y) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Solution. Il y a deux solutions :

$$(x_1, y_1) = (0, 0) \qquad \text{et} \qquad (x_2, y_2) = \left(\tfrac{\gamma}{\delta}, \tfrac{\alpha}{\beta}\right).$$

[3] Il n'y a pas de connaissance physique requise. Ici, c'est l'EDO qui donne l'information physique et non l'inverse.

b) Pour chaque solution (x^*, y^*) de $f(x, y) = \vec{0}$, calculer $\mathrm{d}f(x^*, y^*)$.

Solution. On trouve

$$df(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha - y\beta & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix}.$$

Ainsi, il suit que

$$df(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad df(x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Pour chaque solution (x^*, y^*), on pose $A = \mathrm{d}f(x^*, y^*)$ et on considère le système d'EDO $Y' = AY$. Tracer le portrait de phase du système pour les Y dans un voisinage de $(0, 0)$. De quel genre de point d'équilibre s'agit-il? Est-il stable ou instable?

Solution. On pose $A = df(x_1, y_1)$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = \alpha$ et $\lambda_2 = -\gamma$. Les vecteurs propres associés sont respectivement $v_1 = \binom{1}{0}$ et $v_2 = \binom{0}{1}$. Ainsi, le portrait de phases du linéarisé est celui d'un col dont les axes invariants sont les axes des x et des y (la direction de v_1 et v_2 respectivement). L'axe des x est répulsif (car $\Re\lambda_1 > 0$) et l'axe des y est attractif (car $\Re\lambda_2 < 0$).

On pose $B = df(x_2, y_2)$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = i\sqrt{\alpha\gamma}$ et $\lambda_2 = -i\sqrt{\alpha\gamma}$. Le portrait de phases du linéarisé est un centre qui tourne dans le sens anti-horaire.

Les deux points d'équilibre ne sont ni stables, ni instables.