Équations différentielles

Devoir 3

Hiver 2022

Le devoir est à remettre lundi le 28 mars au début du cours. Vous devez me remettre le devoir en papier. Il est recommandé de taper le devoir à l'ordinateur et de l'imprimer.

Si toutefois vous l'écrivez à la main, alors suivez ces consignes : écrivez **très propre, à double interligne et recto seulement**, écrivez sur du papier blanc ou ligné, mais pas quadrillé. Si votre devoir n'est pas assez propre, je ne le prendrai pas et vous aurez une journée pour le réécrire plus propre (et cette journée compte comme un retard).

Exercice 1. Soit $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)$. On considère le système d'EDO $Y' = AY$ et le champ de vecteurs $\vec{V}(x,y) = \binom{v_1(x,y)}{v_2(x,y)} = A\binom{x}{y}$ associé. Il est tangent à la courbe solution qui passe par (x,y) en ce point.

a) On définit $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to [0, 2\pi]$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{si } x > 0 \text{ et } y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ et } y > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{si } x < 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{si } x = 0 \text{ et } y < 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi, & \text{si } x > 0 \text{ et } y < 0. \end{cases}$$

C'est la fonction qui associe l'angle allant de l'axe des x positifs jusqu'à la droite passant par l'origine et (x,y), pourvu que (x,y) est non nul. On tient pour acquis que f est dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y = 0\}$. Que représente $f \circ \vec{V}(x,y)$? Calculer $\nabla f(x,y)$ et exprimer $\nabla(f \circ \vec{V})(x,y)$ en terme de ∇f et de A.

b) Pour $r \in (0, \infty)$, on définit

$$n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f \circ \vec{V})(r\cos\theta, r\sin\theta)\mathrm{d}\theta. \qquad (*)$$

Montrer[1] que $n(r)$ ne dépend pas de r, c'est-à-dire que $n(r) = n(1)$ pour tout r. *Suggestion.* Vous pouvez faire le calcule explicite, mais il est probablement plus simple de montrer que $\vec{V}(rx, ry) = r\vec{V}(x,y)$ et que $\nabla f(rx, ry) = \frac{1}{r}\nabla f(x,y)$.

c) Calculer n pour les cas suivants :

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ii)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *iii)* $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

d) On appelle n l'*indice* du point d'équilibre de A. Que représente ce nombre?

[1] Il vous est permis de faire appel au théorème de Green, mais ce n'est pas nécessaire (et il faut faire attention!).

Remarque. La définition plus général de l'indice est

$$n(\gamma) = \int_\gamma \frac{v_2 \mathrm{d}v_1 - v_1 \mathrm{d}v_2}{v_1^2 + v_2^2},$$

mais comme les intégrales curvilignes ne sont pas prérequis, on se contentera de la formule $(*)$, que l'on obtient en prenant γ comme étant un cercle. On montre à l'aide du théorème de Green que $n(\gamma)$ ne dépend *essentiellement* pas de γ. On peut également montrer que n est toujours un entier[2].

Exercice 2. On se rappel du modèle physique $x'' = F(x)$ du devoir 1. Pour cet exercice, on prend F linéaire, donc $F(x) = kx$, où $k \in \mathbb{R}$. L'énergie totale est

$$E(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} - \int_0^{x_1} F(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

a) Tracer le portrait de phase de ce modèle dans le plan $x_1 x_2$ pour les cas $k > 0$ et $k < 0$.

b) Expliquer le lien entre le portrait de phase et l'énergie totale.

c) Dans le cas où $k < 0$, l'équation modélise[3] la charge dans un condensateur d'un circuit formé d'un condensateur et d'une bobine. Décrire les différents états du courant dans le circuit. (Si $x(t)$ est la charge au temps t, alors $x'(t)$ est le courant électrique au temps t.)

Remarque. Le concept physique d'énergie totale est un exemple d'*intégrale première*, qui est un concept mathématique. Les intégrales premières, lorsqu'elles existent, sont très utiles pour aider à comprendre la dynamique. Les considérations physiques d'un problème physique mènent souvent à des intégrales premières lorsque ce problème est modélisé par une EDO.

Exercice 3. Soit le système

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) - \beta x(t) y(t), \\ y'(t) = \delta x(t) y(t) - \gamma y(t), \end{cases}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$. C'est un système non linéaire. On pose

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \alpha x - \beta xy \\ \delta xy - \gamma y \end{pmatrix}.$$

a) Trouver les solutions de $f(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

b) Pour chaque solution (x^*, y^*) de $f(x,y) = \vec{0}$, calculer $\mathrm{d}f(x^*, y^*)$.

c) Pour chaque solution (x^*, y^*), on pose $A = \mathrm{d}f(x^*, y^*)$ et on considère le système d'EDO $Y' = AY$. Tracer le portrait de phase du système pour les Y dans un voisinage de $(0,0)$. De quel genre de point d'équilibre s'agit-il? Est-il stable ou instable?

---

[2] Cela est simple à montrer à l'aide de l'analyse complexe. En effet, le calcul de n revient à calculer une intégrale de la forme $\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z$, qui donne toujours un entier par le théorème des résidus.

[3] Il n'y a pas de connaissance physique requise. Ici, c'est l'EDO qui donne l'information physique et non l'inverse.