Équations différentielles

Devoir 2

Hiver 2022

Le devoir est à remettre lundi le 21 février au début du cours. Vous devez me remettre le devoir en papier. Il est recommandé de taper le devoir à l'ordinateur et de l'imprimer.

Si toutefois vous l'écrivez à la main, alors suivez ces consignes : écrivez **très propre, à double interligne et recto seulement**, écrivez sur du papier blanc ou ligné, mais pas quadrillé. Si votre devoir n'est pas assez propre, je ne le prendrai pas et vous aurez une journée pour le réécrire plus propre (et cette journée compte comme un retard).

Ce solutionnaire passe rapidement sur plusieurs détails; il sert à donner une idée de la réponse et non de modèle contre lequel se baser.

Exercice 1. (Conditions aux limites). Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un paramètre. On considère l'EDO avec conditions aux limites

$$(\dagger) \qquad \begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

a) Expliquer pourquoi le théorème d'existence et d'unicité ne s'applique pas.

b) Pour chaque λ, trouver une solution non constante à $(\dagger)$ s'il en existe.

Solution. a) Ce n'est pas un problème de Cauchy, donc le théorème d'existence et d'unicité ne s'applique pas.

b) Il y a trois cas. Si $\lambda > 0$, alors on pose $\alpha = \sqrt{\lambda}$. Le polynôme associé est $p(t) = t^2 + \alpha^2$, dont les zéros sont $\pm i\alpha$. Ainsi, la solution générale est

$$y = C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x).$$

Si y vérifie les conditions aux limites, alors on a

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0$$

et

$$y(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 \sin(\alpha) = 0$$

ce qui est possible si et seulement si $C_2 = 0$ ou $\alpha = n\pi$, où $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, pour $\lambda = n^2\pi^2$, il y a la solution non constante $y = C_2 \sin(n\pi x)$.

Si $\lambda = 0$, alors la solution générale est $y = C_1 + C_2 x$. Dans ce cas, on voit que les conditions aux limites imposent $C_1 = C_2 = 0$, donc aucune solutions non constantes.

Si $\lambda < 0$, alors le polynôme associé est $t^2 + \lambda = 0$. On pose $\alpha = \sqrt{-\lambda}$. La solution générale est $y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$. Dans ce cas aussi, on voit que $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0$ et $y(1) = 0 \Rightarrow C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0$. On trouve $C_1 = C_2 = 0$.

La théorie sur les EDO linéaires d'ordre deux affirment qu'on a vérifié toutes les solutions possibles.

Exercice 2. Ressort avec amortissement. Un poids se meut horizontalement sous l'effet de la force d'un ressort. Un liquide visqueux amortit son mouvement. Soit $x(t)$ la position du poids au temps t. L'accélération du ressort est directement proportionnelle à la position x (le ressort est au repos en $x = 0$) et l'amortissement est directement proportionnel à la vitesse x'. La position du poids est donc décrite par le modèle

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0,$$

où $a > 0$, car l'amortissement ralentit le poids, et $b > 0$, car le ressort ramène le poids vers la position d'équilibre. Décrire la différence entre le cas où l'amortissement est petit ($a < 2\sqrt{b}$) et le cas où l'amortissement est grand ($a > 2\sqrt{b}$).

Solution. Si l'amortissement est petit, le polynôme $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ n'a aucune racine réelle. On pose $z = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$, une racine complexe de p. On pose $\alpha = \Re z = -\frac{a}{2}$ et $\beta = \Im z = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$. La solution générale est de la forme

$$y_1 = C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Dans ce cas, on voit que le poids oscille à l'infini. De plus, comme $\alpha = \frac{-a}{2} < 0$, lorsque $x \to \infty$, il converge vers la position d'équilibre $x = 0$.

Dans l'autre cas, le polynôme p possède deux racines réelles, disons z_1 et z_2. La solution générale est alors

$$y_2 = D_1 e^{z_1 x} + D_2 e^{z_2 x}.$$

On voit qu'il n'y a pas d'oscillation. Le poids traversa la position d'équilibre un nombre fini de fois. De plus, on voit que

$$\tfrac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2} \leq \tfrac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2} < \tfrac{-a+\sqrt{a^2}}{2} = 0,$$

donc $z_1, z_2 < 0$. Il suit que y_2 converge vers la position d'équilibre $x = 0$ lorsque $x \to \infty$.

Exercice 3. Soit l'EDO

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} - z(x) = 0.$$

Pour cette question, vous ne pouvez pas utiliser la fonction exponentielle e^x.

a) Transformer l'EDO en un système de deux équations d'ordre 1 de la forme

$$(*) \qquad \begin{cases} u' = f(u, v) \\ v' = g(u, v). \end{cases}$$

(Autrement dit, trouver f et g.) On pose $\vec{W}(u,v) = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix}$.

Solution. Il suffit de prendre $f(u,v) = v$ et $g(u,v) = u$.

b) Soit $\vec{V}$ un champ de vecteurs du plan en tout point orthogonal à $\vec{W}$, c'est-à-dire que pour tout (u,v), on a $\vec{V}(u,v) \bullet \vec{W}(u,v) = 0$, où $\bullet$ est le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Trouver une fonction $h\colon (u,v) \mapsto h(u,v) \in \mathbb{R}$ telle que $\nabla h = \vec{V}$. Tracer les courbes de niveau de h dans le plan uv ainsi que les vecteurs de $\vec{V}$ et ceux de $\vec{W}$. Quelle est le lien entre les courbes de niveau de h et les solutions de $(*)$?

Solution. On voit que $\vec{V}(u,v) = (-u,v)$ est orthogonale à $\vec{W}(u,v)$. Ensuite, il suffit de prendre $h = -u^2 + v^2$. Les courbes de niveau de h sont toujours orthogonales à ∇h, donc parallèle à $\vec{W}$ dans ce cas. Ainsi, les courbes de niveau de h suivent les courbes solutions du système.

c) On définit cosh et sinh comme étant respectivement l'unique solution aux problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} - z(x) = 0, \\ z(0) = 1, \\ z'(0) = 0, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} - z(x) = 0, \\ z(0) = 0, \\ z'(0) = 1. \end{cases}$$

Montrer que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Solution. On pose $g(x) = \cosh'(x)$. On voit que $g'' - g = 0$ et que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. Ainsi, g est une solution du deuxième problème de Cauchy. Il suit que $g(x) = \sinh x$, d'où $\cosh'(x) = \sinh(x)$. De la même façon, on montre que $\sinh'(x) = \cosh(x)$.

Ensuite, on dérive l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh^2 x - \sinh^2 x) = 2\cosh x \sinh x - 2\sinh x \cosh x = 0.$$

On trouve donc que $\cosh^2 x - \sinh^2 x = C$, une constante. Puisque qu'en $x = 0$, on a $\cosh 0 = 1$ et $\sinh 0 = 0$, on obtient $C = 1$.

d) Montrer que

$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y).$$

Solution. On fixe y. On pose $f(x) = \sinh(x+y)$ et $g(x) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$. On peut voir par calcul direct que $f''(x) = f(x)$ et $g''(x) = g(x)$. Ensuite, on a également

$$\begin{array}{c} f(0) = \sinh(y) \\ f'(0) = \cosh(y) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{c} g(0) = \sinh(y) \\ g'(0) = \cosh(y). \end{array}$$

Ainsi, f et g sont deux solutions du même problème de Cauchy. On conclut que $f = g$.