Équations différentielles

Devoir 1

Hiver 2022

Le devoir est à remettre lundi le 7 février au début du cours. Vous devez me remettre le devoir en papier. Il est recommandé de taper le devoir à l'ordinateur et de l'imprimer.

Si toutefois vous l'écrivez à la main, alors suivez ces consignes : écrivez **très propre, à double interligne et recto seulement**, écrivez sur du papier blanc ou ligné, mais pas quadrillé. Si votre devoir n'est pas assez propre, je ne le prendrai pas et vous aurez une journée pour le réécrire plus propre (et cette journée compte comme un retard).

Exercice 1. (12pts) Un réservoir d'un volume V (en litre) se remplit à un débit de R litres par minute d'une solution d'eau salée à 4 grammes de sel par litre. Il y a S litres par minute de liquide qui s'écoulent du réservoir. Au début de l'expérience, le réservoir est rempli à 20% de sa capacité totale en eau contenant 20 grammes de sel dissous. On suppose que le sel se mélange instantanément uniformément.

a) Écire une équation différentielle qui modélise la quantité de sel dans le réservoir au moment t. Expliquer ce que représente chacun des termes de l'équation.

b) Quelle(s) condition(s) doit-on imposer pour s'assurer que le réservoir se remplira en un temps fini?

c) Avec $V = 200$, $R = 5$ et $S = 4$, quelle quantité de sel contiendra le réservoir lorsqu'il sera plein?

Solution. a) Soit $Q(t)$ la quantité de sel au temps t. Le volume de liquide dans le réservoir est $V(t) = 0{,}2V + (R - S)t$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= \text{sel qui entre} - \text{sel qui sort}\\ &= 4R - S\frac{Q(t)}{V(t)},\end{aligned}$$

où $4R$ est la quantité de sel par litre fois la quantité de litre par minute qui entre dans le réservoir et le deuxième terme est la quantité de liquide par minute S qui sorte multiplié par la quantité de sel par litre $\frac{Q(t)}{V(t)}$.

b) Il suffit que $R > S$.

c) L'équation est

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 4 \times 5 - 4\frac{Q(t)}{40 + (5-4)t} = 20 - 4\frac{Q(t)}{40 + t}.$$

C'est une EDO linéaire inhomogène. La solution homogène est trouvée par séparation de variable et vaut

$$Q_h(t) = \frac{C}{(40+t)^4}.$$

La solution particulière est $Q_p(t) = 4t + 160$. On obtient donc comme solution générale

$$Q(t) = \frac{C}{(40+t)^4} + 4t + 160.$$

On sait que $Q(0) = 20$, d'où $C = -140 \times 40^4$. Il y a $0{,}2V = 40L$ de liquide à $t = 0$ et le réservoir se remplit à un taux de $R - S = 1$ litre par minute. Ainsi le réservoir sera rempli après 160 minutes. On trouve $Q(160) \approx 799{,}776$ grammes de sel.

Exercice 2. (24pts) Un vaisseau spatial part de l'origine dans la direction des z positifs avec une vitesse scalaire at, où t est le temps et a est une constante. Un pirate de l'espace part à sa poursuite au même moment du point $(c, 0, 0)$. Il se déplace à une vitesse bt toujours dans la direction du vaisseau. La position du vaisseau et du pirate ne varie pas dans la coordonnée y. On suppose que $a, b, c > 0$.

a) Montrer que la position (x, z) du pirate vérifie l'équation

$$x\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{a}{b}\sqrt{1 + \left(\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

Indices. Commencez par trouver une expression pour la vitesse du pirate V_P. Ensuite, trouvez une expression pour $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$. N'oubliez pas que vous connaissez $\|V_P\|$.

b) Résoudre l'équation pour les cas $a > b$ et $b > a$.

c) On prend maintenant $a = c = 1$ et $b = 2$ pour le reste du numéro. Montrer que la solution $z\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ est strictement décroissante. Calculer la limite lorsque $x \to 0^+$ de $z(x)$. Soit d cette limite.

d) Lorsque le pirate est au point $(0, d)$, quelle distance le sépare du vaisseau?

Solution. a) On sait que le vaisseau est à la position $P_p = (0, at^2/2)$ au temps t. Ainsi, la vitesse V_p du pirate est donc

$$V_p = C(t)\begin{pmatrix} -x \\ \frac{at^2}{2} - z \end{pmatrix},$$

où $C(t)$ est un scalaire inconnu. Comme ce vecteur est tangent à la trajectoire du pirate, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{a\frac{t^2}{2} - z}{-x}. \qquad (*)$$

On doit se débarasser du t dans cette expression. On utilise le fait suivant : comme on connaît la vitesse scalaire du pirate, on peut calculer la distance qu'il parcourt directement. Ensuite, on utilise la formule pour la longueur d'arc pour exprimer cette distance en terme de x. On a donc

$$d(t) = \int_0^t \|V_v(\tau)\|\mathrm{d}\tau = \int_0^t b\tau\mathrm{d}\tau = b\frac{t^2}{2}.$$

D'autre part, on a

$$d(t) = \int_0^t \sqrt{x'(\tau)^2 + z'(\tau)^2}\mathrm{d}\tau = -\int_c^x \sqrt{1 + \tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(\xi)^2}\mathrm{d}\xi.$$

(Le signe moins vient du fait que $x'(t)$ est négatif.) Ainsi, on a

$$a\frac{t^2}{2} = -\frac{b}{a}\int_c^x \sqrt{1 + \tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(\xi)^2}\mathrm{d}\xi =: D(x).$$

On réécrit $(*)$ en

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{D(x) - z}{-x}.$$

En dérivant par rapport à x, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x} &= \frac{(D'(x) - z'(x))(-x) + (D(x) - z)}{x^2}\\ &= -\frac{D'(x)}{x} + \frac{z'(x)x + (D(x) - z)}{x^2}.\end{aligned}$$

Puisque $xz'(x) = z - D(x)$, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x} = -\frac{D'(x)}{x} = \frac{a}{bx}\sqrt{1 + \tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}^2}.$$

b) On pose $v(x) = z'(x)$. L'équation d'ordre 2 devient

$$xv'(x) = \frac{a}{b}\sqrt{1 + v(x)^2}.$$

Par séparation de variable, on trouve

$$\int \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{a + v(x)^2}} = \frac{a}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \iff \log|\sqrt{1 + v(x)^2} + v(x)| = \tfrac{a}{b}\log|x| + C.$$

En isolant $v(x)$ et en remplaçant par $v(x) = z'(x)$, on a

$$z'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{|x|^{a/b}}{D} - \frac{D}{|x|^{a/b}}\right).$$

Ce z' ne sera une solution que sur l'intervalle $(0, c)$, donc on peut enlever les valeurs absolues du x. Lorsque $t = 0$, on a $x = c$ et la vitesse pointe directement vers les x négatifs, donc $z'(c) = 0$. Si on remplace dans l'équation précédente, on trouve $D = c^{a/b}$.

Ensuite, on pose $\alpha = \frac{a}{b}$. Dans les deux cas de la question, on a $\alpha \neq 1$. On intègre maintenant z' pour trouver

$$z(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^{\alpha+1}}{c^\alpha(\alpha + 1)} - \frac{c^\alpha x^{-\alpha+1}}{-\alpha + 1}\right) + E.$$

Enfin, à $t = 0$, on a $x = c$ et $z(c) = 0$. Ainsi, on trouve

$$E = -\frac{1}{2}\left(\frac{c}{\alpha+1} - \frac{c}{-\alpha+1}\right).$$

c) On a $\alpha = \frac{1}{2}$. La dérivée de z est déjà calculée et vaut

$$z'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Pour $x \in (0,1)$, on voit que $z'(x) < 0$, donc z est strictement décroissante. En particulier, z est injective.

La limite lorsque $x \to 0^+$ est simple à calculer et vaut

$$d = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{2}{3}.$$

d) Il faut trouver combien de temps t_0 est nécessaire au pirate pour se rendre au point $(0,d)$. Ce temps correspond à

$$b\frac{t_0^2}{2} = \int_0^c \sqrt{1 + z'(x)}\mathrm{d}x.$$

Avec $b = 2$ et $a = c = 1$, on trouve

$$t_0^2 = \tfrac{4}{3},$$

donc $t_0 = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Ainsi, le vaisseau se trouve au point $(0, \frac{2}{3})$.

La distance entre les deux est donc nulle.

Exercice 3. (24pts) Soit $x \in \mathbb{R}$ une variable de position. On suppose qu'un système physique obéit au modèle

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F(x), \tag{$\dagger$}$$

où F représente une force.

a) Transformer ($\dagger$) en un système d'équations d'ordre 1 en terme des variables x_1 et x_2, avec x_1 une variable de position et x_2, une variable de vitesse.

On pose

$$K(x_2) = \frac{x_2^2}{2} \qquad \text{et} \qquad U(x_1) = -\int_{x_0}^{x_1} F(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

On appelle K l'énergie cinétique et U, l'énergie potentielle.

b) Montrer que ce modèle physique s'adhère au principe de la conservation de l'énergie. Plus précisément, montrer que l'énergie totale $E(x_1,x_2) = K(x_2) + U(x_1)$ demeure constante le long d'une solution $(x_1,x_2) = (x_1(t), x_2(t))$ du système en a).

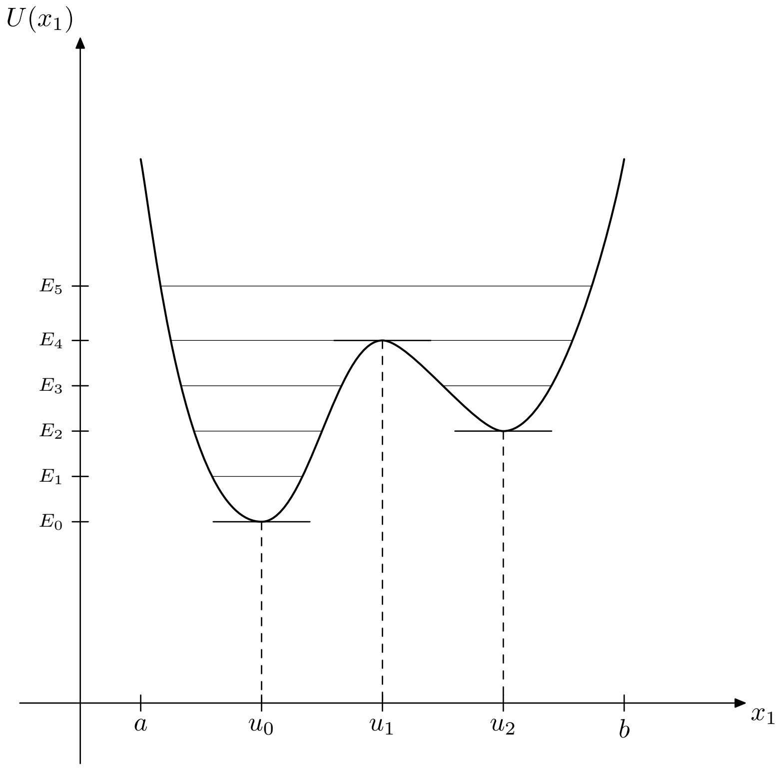
c) Trouver les points critiques* de E et de U.

---

* Un point critique de $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est un point $x \in U$ où $df_x = \vec{0}$.

d) Les oscillations d'un pendule peuvent se modéliser en prenant $F(x) = -\sin x$, où x est l'angle entre la corde et la verticale (les constantes éventuelles sont omises pour simplifier). On choisit $x_0 = 0$. Dessiner le graphe de U et dessiner quelques courbes de niveau de E. Identifier les points critiques de E qui paraissent sur votre dessin.

e) Maintenant, on suppose que F est une fonction inconnue, mais on sait que le graphe du potentiel U en fonction de x_1 à l'allure suivant :



Faire une esquisse des courbes de niveau $E(x_1, x_2) = E_j$, où E_j, $j = 0, 1, \ldots, 5$, est identifié sur l'image, et identifier les points critiques de E. Identifier également quelle courbe de niveau est associé à quel E_j. Remarquer que

$$E_0 < E_1 < E_2 < E_3 < E_4 < E_5$$

$$\text{et} \quad E_0 = U(u_0), \quad E_2 = U(u_2), \quad E_4 = U(u_1).$$

Solution. a) On pose $x_1(t) = x(t)$ et $x_2(t) = x'(t)$. On obtient le système

$$(\ddagger) \qquad \begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = F(x_1). \end{cases}$$

b) Si $(x_1, x_2) = \big(x_1(t), x_2(t)\big)$ est une solution de $(\ddagger)$, alors par la règle de dérivation en chaîne, on a

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = K'(x_2)x_2' + U'(x_1)x_1' = x_2F(x_1) - F(x_1)x_2 = 0.$$

Ainsi, E constante le long de (x_1, x_2).

c) Pour U, on a

$$U'(x_1) = -F(x_1).$$

Donc x_1 est un point critique de F si et seulement si $F(x_1) = 0$.

Pour E, on a

$$\nabla E = (-F(x_1), x_2)$$

qui est nulle si et seulement si $F(x_1) = 0$ et $x_2 = 0$.

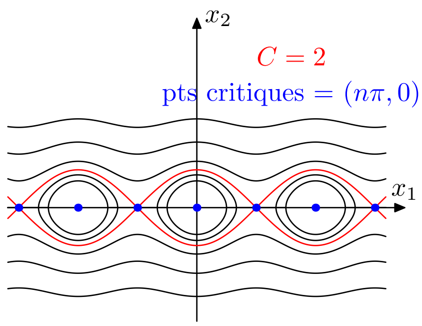
d) La formule explicite de E est

$$E(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} - \cos(x_1) + 1.$$

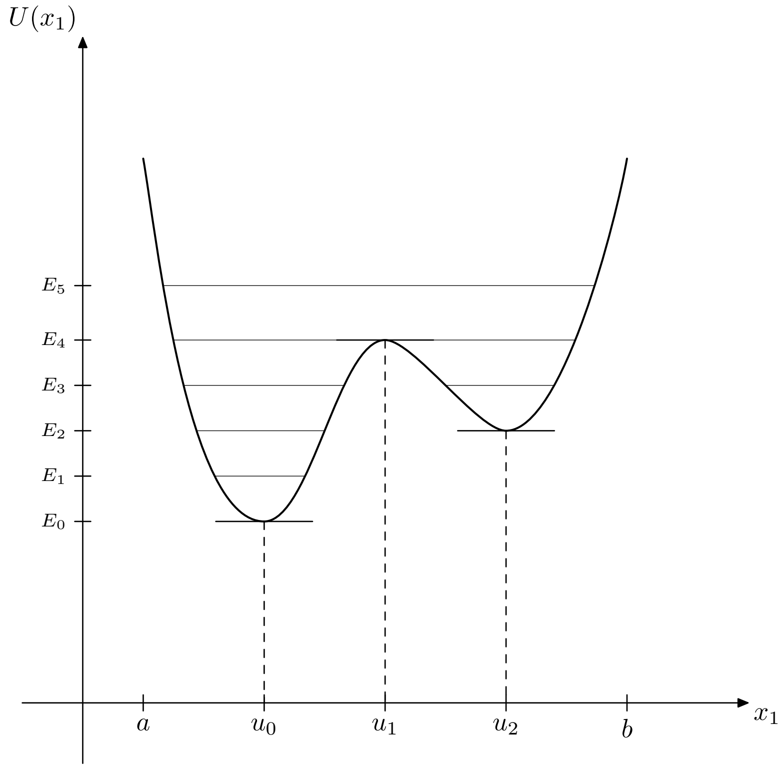
Ainsi, une courbe de niveau $E(x_1, x_2) = C$ aura la forme

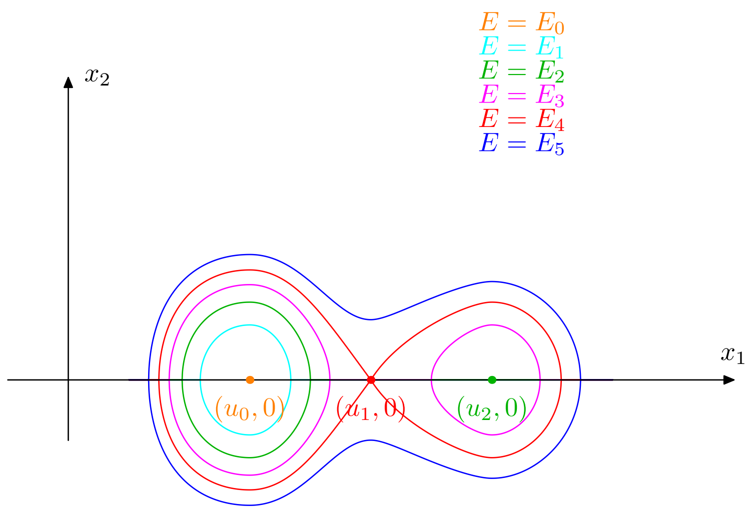
$$\big(x_1(t), x_2(t)\big) = (t, \pm\sqrt{2C - 2 + 2\cos(t)}),$$

là où $2C - 2 + 2\cos(t) \geq 0$.



e) Les courbes de niveau sont illustrées sur la figure suivante. La couleur de la courbe est associée à la constante E_j de la même couleur. Remarquer que certaines courbes ont plus d'une composantes. Les points critiques sont les trois points représentés sur la figures. Ils correspondent à $(u_0, 0)$, $(u_1, 0)$ et $(u_2, 0)$, où u_0, u_1, u_2 sont les points critiques de U.


$U(x_1)$
E_5
E_4
E_3
E_2
E_1
E_0
x_1
a
u_0
u_1
u_2
b


$E = E_0$
$E = E_1$
$E = E_2$
$E = E_3$
$E = E_4$
$E = E_5$
x_2
x_1
$(u_0, 0)$
$(u_1, 0)$
$(u_2, 0)$