TP 8

#7 a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

Essayons de diagonaliser B.

$P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow (1-\lambda)^2 = 4 \Rightarrow 1-\lambda = \pm 2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 2 \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 3. \end{cases}$

Vecto propres :

$\lambda_1 = -1$

$(A-(-1)I)v_1 = \vec{0} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{L_{2,1}(-2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 3$

$(A-3I)v_2 = \vec{0} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \overset{L_{2,1}(2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

La diagonalisation est donc $B = PDP^{-1}$!!

avec $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$

on sait que :

- Pour une matrice inversible P et une matrice A quelcomque, on a :

$$e^{PAP^{-1}} = P e^{A} P^{-1}$$

- Pour une matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_2 & \\ 0 & \ddots & d_n \end{bmatrix}$,

$$e^{D} = \begin{bmatrix} e^{d_1} & & 0 \\ & e^{d_2} & \\ 0 & \ddots & e^{d_n} \end{bmatrix}.$$

alors, ici :

$$e^{B} = e^{PDP^{-1}} = P e^{D} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-1} & e^{3} \\ -2e^{-1} & 2e^{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{e^{-1}+e^{3}}{2} & \frac{-e^{-1}+e^{3}}{4} \\ e^{-1}+e^{3} & \frac{e^{-1}+e^{3}}{2} \end{bmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

Tentons de la diagonaliser :

$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(3-\lambda)+4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda-1)^2$

$\Rightarrow P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$

Vecto propres:

$(A - 1 \cdot I)v = \vec{0} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{L_{21}(2)}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

mais on a pas de 2^e vecto propre. La matrice n'est donc pas diagonalisable !!

À la place, nous allons la triagonaliser ! c'est-à-dire de trouver P et T, tels que :

$A = PTP^{-1}$, P est inversible et T une matrice triangulaire supérieur

Pour la matrice P, on prend le vecteur propre $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ comme première colonne, puis un vecter linéairement indépendant à v comme 2^e colonne,

Je vais prendre $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

on a $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$

La matrice T aura la forme $T = \begin{bmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

où $\lambda = 1$ (notre valeur propre) et « a » à déterminer. on veut que $PTP^{-1} = A$.

$$\Rightarrow \underset{P}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{T}{\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{P^{-1}}{\begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}}.$$

on trouve « a » :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a+2 \\ -2 & -2a+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5+2a}{5} & \frac{a}{5} \\ -4a/5 & \frac{5-2a}{5} \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 5.$$

on a bien $A = PTP^{-1}$ avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ce qui complète la triagonalisation! ✓

P est inversible, donc:

$e^A = e^{PTP^{-1}} = P e^T P^{-1}$

on peut montrer que $T^n = \begin{pmatrix} 1 & 5n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$e^T = \begin{pmatrix} e & 5e \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

(on a fait le #6 a) au dernier tp, qui est très similaire).

$$\Rightarrow e^A = Pe^T P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 5e \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e & 7e \\ -2e & -9e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3e & e \\ -4e & -e \end{pmatrix} \checkmark$$

ouf!

#8

Montrer que si A s'écrit comme :

$$A = \begin{pmatrix} B_{k\times k} & 0 \\ 0 & C_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}$$

alors,

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{B}_{k\times k} & 0 \\ 0 & e^{C}_{(n-k)\times(n-k)} \end{pmatrix}.$$

Dem :

Nous allons premièrement mq $\forall m \geq 1$,

on a $(A^m)_{ij} = (B^m)_{ij}$ lorsque $1 \leq i,j \leq k$.

(c'est-à-dire que l'élément de la i^e ligne et j^e colonne de A^m est égal à l'élément ij de B^m).

Soit $1 \leq i,j \leq k$. Cas de base :

$(A)_{ij} = (B)_{ij}$ par hypothèse de l'énoncé.

Soit $(A^m)_{ij} = (B^m)_{ij}$ pour un certain $m \geq 1$.

$$(A^{m+1})_{ij} = (A^m \cdot A)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A^m)_{il} \cdot (A)_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{k} (A^m)_{il} \cdot (A)_{lj} \quad (\text{car pour } l \geq k+1,\ (A)_{lj} = 0)$$

$= \sum_{l=1}^{k} (B^m)_{il} \cdot B_{lj}$ (Par hypothèse d'induction).

$= (B^{m+1})_{ij}$ ✓ //

Puis, on peut mq $(e^A)_{ij} = (e^B)_{ij}$ (pour $1 \leq i,j \leq k$):

$$(e^A)_{ij} = \left(I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A^m}{m!}\right)_{ij} = I_{ij} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(A^m)_{ij}}{m!}$$

$$= I_{ij} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(B^m)_{ij}}{m!} = \left(I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B^m}{m!}\right)_{ij}$$

$$= (e^B)_{ij} \checkmark$$

Analoguement, pour $k+1 \leq i,j \leq n$, on aura $(e^A)_{ij} = (e^C)_{ij}$.

Maintenant, pour $1 \leq i \leq k$, $k+1 \leq j \leq n$ $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$

on aura $(A^m)_{ij} = 0 \quad \forall\ m \geq 1$:

$(A)_{ij} = 0$ ✓

$(A^{m+1})_{ij} = (A^m \cdot A)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A^m)_{il} \cdot A_{lj}$

$= \sum_{l=k+1}^{n} (A^m)_{il} A_{lj}$ (car $A_{lj} = 0$ pour $1 \leq l \leq k$, $k+1 \leq j \leq n$)

$= 0 \quad$, car $(A^m)_{il} = 0$ pour $\begin{matrix} 1 \leq i \leq k \\ k+1 \leq l \leq n \end{matrix}$

par hypothèse d'induction. ✓

Alors,

$$(e^A)_{ij} = \left(I + \sum \frac{A^m}{m!}\right)_{ij} = I_{ij} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(A^m)_{ij}}{m!} = 0 + 0 = 0.$$

Analoguement, on aura $(e^A)_{ij} = 0$

pour $k+1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$.

D'où, la matrice e^A s'écrit comme:

$$e^A = \begin{pmatrix} e^B & 0 \\ 0 & e^C \end{pmatrix}$$

$\square$

#9 b) Pour $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer e^A.

A s'écrit en bloc : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on sait que $e^B=\begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$.

$C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cette matrice est de forme

$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ avec $x=0, y=1$. $\Rightarrow e^C = e^x \begin{pmatrix} \cos y & -\sin y \\ \sin y & \cos y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e^C = \begin{pmatrix} \cos 1 & -\sin 1 \\ \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}$.

Puisque A s'écrit en bloc, on utilise le #8 :

$$e^A = \begin{pmatrix} e^B & 0 \\ 0 & e^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 1 & -\sin 1 \\ 0 & 0 & \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

#10 a). Mq $e^{A^T} = (e^A)^T$

En utilisant:

- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(A^m)^T = (A^T)^m$

↳ car $(AB)^T = B^T A^T \Rightarrow (A^2)^T = A^T A^T = (A^T)^2$ et par induction...

$$e^{A^T} = I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(A^T)^m}{m!} = I^T + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(A^m)^T}{m!} = \left(I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A^m}{m!}\right)^T = (e^A)^T$$

$\boxtimes$

#11

Pour un système $Y' = AY$, la solution générale est donnée par : $Y = e^{Ax} \cdot Y_0$

où Y_0 est un vecteur de constante.

ce qui est équivalent à $Y = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

où c_i sont des constantes et v_i les colonnes de e^{Ax}.

b) $Y' = AY$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$Ax = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{pmatrix}$ $\leadsto$ de forme $\begin{pmatrix} s & -t \\ t & s \end{pmatrix}$ avec $\begin{matrix} s = 0 \\ t = -x \end{matrix}$

$$\Rightarrow e^{Ax} = e^0 \begin{pmatrix} \cos(-x) & -\sin(-x) \\ \sin(-x) & \cos(-x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ La solution générale :

$$Y = \begin{pmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

f) $Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A.} Y$

calculons e^{Ax} :

$$Ax = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

de forme $\begin{pmatrix} B_{1\times 1} & 0 \\ 0 & C_{2\times 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x) & 0 & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$

B

C

$e^B = e^x$

$e^C = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & x \end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ semblable au #6b) fait la semaine dernière.

$\Rightarrow e^A = \begin{pmatrix} e^B & 0 \\ 0 & e^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$ (Par le #9).

Alors la solution générale est donnée par:

$$Y = e^{Ax} Y_0 = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^x & xe^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

$$= C_1 \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ xe^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$