Équations différentielles

EDO

Note de cours fait par Jonathan Godin*

Table des matières

Introduction . . . 2
Notations . . . 2
Rappels du calcul de fonctions de plusieurs variables . . . 2

Chapitre 1. Équations d'ordre 1 et 2 . . . 3
- 1.1. Définitions et exemples . . . 3
- 1.2. Les équations du premier ordre . . . 6
  - 1.2.1 Forme normale . . . 6
  - 1.2.2 Techniques de résolution d'EDO d'ordre 1 . . . 8
  - 1.2.3 Systèmes à deux équations, courbes et longueur d'arc . . . 17
- 1.3. Équations linéaires du premier ordre . . . 21
  - 1.3.1 Équation homogène . . . 21
  - 1.3.2 Équation inhomogène . . . 23
- 1.4. Équations d'ordre supérieur . . . 25
  - 1.4.1 Réduction d'ordre . . . 25
  - 1.4.2 Existence et unicité des solutions . . . 28
  - 1.4.3 Équations linéaires du deuxième ordre . . . 36
- 1.5. Méthode d'Euler . . . 48

Chapitre 2. Systèmes d'équations différentielles ordinaires . . . 48
- 2.1. Systèmes linéaires . . . 49
  - 2.1.1 Définitions et exemples . . . 49
  - 2.1.2 Propriétés des systèmes linéaires . . . 52
- 2.2. Systèmes linéaires à coefficients constants . . . 55
  - 2.2.1 Norme matricielle . . . 55
  - 2.2.2 Exponentielle matricielle . . . 59

* Ces notes sont en partie inspirées de mes notes prises en classe au cours d'Équations différentielles et calcul vectoriel donné par Jean-Philippe Lessard à l'Université Laval à l'hiver 2012.

17/3/2022

Introduction

Ce document constitue les notes de cours pour le cours de calcul II (équations différentielles et calcul vectoriel) à l'Université de Montréal. Dans un premier temps, ce texte traite des premières techniques de résolution des équations différentielles ordinaires (EDO) du premier et deuxième ordre, ainsi que les aspects théoriques comme le Théorème d'existence et d'unicité des solutions (sans la démonstration de ce dernier). Dans un deuxième temps, il traite de l'analyse vectoriel, à savoir le calcul différentiel des fonctions vectorielles, les différents types d'intégrales et les théorèmes fondamentaux : Green-Riemann, Stokes, Gauß (ou flux-divergece).

Inspiré du TEXbook, les paragraphes comme celui-ci précédés d'un sinus du topologue contiennent des remarques ou des explications qui peuvent être ignorées lors d'une première lecture. Ils sont composés en taille 10pt, donc on peut facilement savoir où se termine le passage. Ces sections seront étiquetés ainsi pour l'une des raisons suivantes : des outils qui ne sont pas supposés maîtrisés pour le cours sont utilisés (p.ex. la continuité uniforme), un raisonnement un peu plus difficile à suivre (c'est ce qui a inspiré le symbole), le contenu s'éloigne un peu trop de la discussion ou du cadre du cours, un exercice qui est plus difficile.

Notations

$y \equiv C$	« Constamment égale », la fonction $y(x)$ vaut C pour tout x.
$\mathrm{d}f_x$	La différentielle de f au point x.
∇f	Le gradient de f.
$\vec{v} \bullet \vec{w}$	Le produit scalaire entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
$\vec{v} \times \vec{w}$	Le produit vectoriel entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
$\mathrm{d}s$	Élément de longueur, $\mathrm{d}s = \\|\vec{r}\,'(t)\\|\mathrm{d}t$.
$\mathrm{d}A$	Élément d'aire, $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
$\mathrm{d}S$	Élément de surface, $\mathrm{d}S = \\|\vec{N}\\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.
EDO	Équation différentielle ordinaire.

Rappels du calcul de fonctions de plusieurs variables

Soit $(x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *de classe* C^1 si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existe et est continue pour $j = 1, \ldots, n$.

Le gradient de f, noté ∇f ou $\operatorname{grad} f$, est défini par

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Plus généralement, la *différentielle* d'une fonction $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 est équivalente à la matrice $m \times n$

$$\mathrm{d}g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{x_n} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est aussi appelée la *matrice jacobienne* de g, notée $\operatorname{Jac} g$. La *jacobienne* de g référera au déterminant de $\operatorname{Jac} g$ en valeur absolue, notée $|\operatorname{Jac} g|$, c'est-à-dire

$$|\operatorname{Jac} g| := \left|\det\bigl(\operatorname{Jac} g\bigr)\right|.$$

On notera par $\operatorname{Jac}_x g$ au besoin la matrice jacobienne de g au point x, c'est-à-dire $\operatorname{Jac}_x g := (\operatorname{Jac} g)\big|_x$.

Le *produit vectoriel* est défini pour deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ seulement. Soit $u, v \in \mathbb{R}^3$. On a

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & u_1 & v_1 \\ j & u_2 & v_2 \\ k & u_3 & v_3 \end{vmatrix} := \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ -u_1v_3 + u_3v_1 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1. *La dérivation en chaîne* permet de dériver $f \circ g$ et donne la formule

$$\frac{\partial}{\partial x} f \circ g(x, y) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\big(g(x, y)\big)\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} f \circ g(x, y) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\big(g(x, y)\big)\frac{\partial g}{\partial y}(x, y).$$

Le gradient de $f \circ g$ est donc

$$\nabla f \circ g = f' \cdot \nabla g.$$

Exemple 0.0.1. Soit $f\colon t \mapsto f(t)$ et $g(x, y) = x^2 + y^2$. On veut dériver $f \circ g$. On a $f \circ g(x, y) = f(x^2 + y^2)$. La dérivation en chaîne nous donne

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x^2 + y^2) = f'(x^2 + y^2)2x$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x^2 + y^2) = f'(x^2 + y^2)2y.$$

En particulier, le gradient de $f \circ g$ est $\big(f'(x^2 + y^2)2x, f'(x^2 + y^2)2y\big) = f'(x^2 + y^2)\big(2x, 2y\big)$.

Les *courbes de niveau* d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont les ensembles

$$\mathcal{C}_C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = C\}$$

pour des constantes $C \in \mathbb{R}$. Lorsque f est de classe C^1, les courbes de niveau forment des courbes régulières dans le plan xy. Le gradient de f est alors perpendiculaire à la courbe de niveau en tout point.

Ceci se généralise à des surfaces de niveau pour les fonctions $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Chapitre 1

Équations d'ordre 1 et 2

1.1. Définitions et exemples

Commençons par quelques exemples classiques où les équations différentielles sont utilisées.

Exemple 1.1.1. *La seconde loi de Newton.*

$$mx''(t) = mg - ax'(t),$$

où $x(t)$ est la position d'un corps de masse m et a est une constante.

Exemple 1.1.2. *Désintégration radioactive (Modèle de Rutherford).*
Soit $M(t)$ la quantité de matière radioactive au temps t. Le taux de désintégration est proportionnel à la quantité de matière :

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\lambda M,$$

où λ est une constante de proportionnalité.

Les équations différentielles ordinaires ne font intervenir *qu'une seule variable indépendante*. Lorsqu'elles font intervenir plusieurs variables indépendantes, elles sont appelées *équations aux dérivées partielles*. L'étude de ces dernières dépassent largement le cadre de ce cours.

Définition 1.1.3. Une *équation différentielle ordinaire* (EDO) est une relation entre une variable (indépendante), une fonction (variable dépendante) et un certain nombre de ces dérivées.

****

Définition 1.1.4. On appelle *ordre d'une EDO* l'ordre de dérivation le plus élevé qu'on y trouve.

****

Exemple 1.1.5.
a) $(y'')^3 + (y')^3 = 1$ est une équation du deuxième ordre.
b) $y' = y + x^3$ est une équation du premier ordre.
c) $y^{(n)} + y^{(n-1)} + \cdots + y' + y + x = 0$ est une équation d'ordre n.

Définition 1.1.6. On appelle *solution d'une EDO* une fonction $y = f(x)$ qui satisfait la relation de l'EDO.

****

Exemple 1.1.7.

a) $y(x) = 3x$ est une solution de $\big(y'(x)\big)^2 = 9$. Or, $y(x) = e^x$ ne l'est pas.

b) $y(x) = -3x + 4$ est aussi une solution de $\big(y'(x)\big)^2 = 9$. De même pour $y(x) = -3x + \alpha$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) L'EDO $\big(y'(x)\big)^2 + x^2 = -1$ n'a pas de solution réelle.

d) $y'(x) = -2y(x)$: $y(x) = e^{-2x}$ est une solution. En effet, on a $y'(x) = -2e^{-2x} = -2y(x)$.

Exemple 1.1.8. $x''(t) = g$.

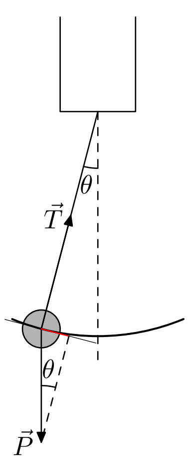
$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x'(t)) = g \\ \Rightarrow\ &\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = gt + C_1 \\ \Rightarrow\ &x(t) = g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

pour C_1, C_2 des constantes arbitraires. Ceci nous donne la *solution générale*.

Supposons qu'on veuille trouver une solution satisfaisant les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = 1 \\ x'(0) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x(0) = C_2 = 1 \\ x'(t) = gt + C_2 \Rightarrow x'(0) = C_1 = 0 \end{aligned}$$

La solution particulière est donc $x(t) = g\frac{t^2}{2} + 1$.



Exemple 1.1.9. *Petites oscillations d'un pendule.* Un poids attaché à une tige impondérable de longueur r oscille d'un petit angle θ, comme sur l'image. La vitesse tangentielle est donnée par $r\theta'$. Ainsi, l'accélération tangentielle est $r\theta''$. La tension agit perpendiculairement à la tangente, donc on s'occupe seulement de la composante tangentielle du poids, qui est $-mg\sin\theta$, où m, g sont des constantes. La deuxième loi de Newton donne

$$r\theta'' = -mg\sin\theta.$$

Si θ est suffisament petit, l'approximation $\sin\theta \approx \theta$ donne un modèle raisonnable. Ainsi, les petites oscillations sont décrites par

$$\theta'' = -k\theta,$$

où k est une constante positive qui combine toutes les autres.

On introduit une notation qui sera utile pour le reste du cours.

Définitions 1. Une fonction $f\colon U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est *continument différentiable* si toutes ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, pour $j = 1, \ldots, n$, existent et sont *continues*. On dira que f *est de classe* C^1.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est *de classe* C^k si $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est de classe C^{k-1} pour tout $j = 1, \ldots, n$.
3. La fonction f est *de classe* C^∞ si f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Une fonction *de classe* C^0 est une fonction continue.
5. Une fonction $g\colon V \to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^k si $g_i\colon V \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, est de classe C^k, où $g = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}$.

Exemple 1.1.10. a) Toutes fonctions polynômiales est de classe C^∞. Toutes fonctions rationnelles est de classe C^∞ là où le dénominateur est non nul. Par exemple,

$$f(x, y) = \frac{x}{x - y}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x)\}$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}^2$ sauf si $x = y$.

b) Les fonctions élémentaires, exp, sin, cos, tan et leur inverse, sont de classe C^∞ sur leur domaine. Par exemple,

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} xe^y \cos(xz) \\ x^2 - \tan z \end{pmatrix}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) \mid z = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$.

1.2. Les équations du premier ordre

On rappelle qu'une EDO du premier ordre est une équation qui ne fait intervenir aucune dérivée d'ordre deux ou d'ordre supérieur. Ainsi, on retrouvera la variable indépendante, la variable dépendante et la dérivée première de celle-ci. Le but ultime est de résoudre de telles équations, mais la section couvrira également un peu de théorie.

1.2.1 Forme normale

La forme la plus générale pour écrire une EDO du premier ordre est

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0, \qquad F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.$$

Exemple 1.2.1.

1) $F(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 - x_3 + 1$ mène au système $\big(y(t)\big)^2 - y'(t) + 1 = 0$.
2) L'EDO

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\lambda M$$

s'écrit $y' = -\lambda y$, donc $y' + \lambda y = 0$, ce qui mène à la fonction

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_3 + \lambda x_2.$$

Par le théorème des fonctions implicites (voir analyse III), on a que si $\frac{\partial F}{\partial x_1}$, $\frac{\partial F}{\partial x_2}$, $\frac{\partial F}{\partial x_3}$ existent et sont continues (F est de classe C^1) et si $\frac{\partial F}{\partial x_3}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) \neq 0$ et $F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3) = 0$, alors on peut réécrire $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ comme $x_3 = g(x_1, x_2)$ pour (x_1, x_2) près de $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ et une certaine fonction g. L'EDO associé prend donc la forme

$$y'(t) = g\big(t, y(t)\big). \qquad \text{(forme normale)}$$

Exemple 1.2.2. $\big(y'(t)\big)^2 + \big(y(t)\big)^2 = 9$. Ici, on a la fonction associée $F(x_1, x_2, x_3) = x_3^2 + x_2^2 - 9$. On voit que $\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3 \neq 0$ seulement si $x_3 \neq 0$.

Si $y'(t) \neq 0$, alors l'EDO peut s'écrire soit comme $y'(t) = \sqrt{9 - y(t)^2}$ ou $y'(t) = -\sqrt{9 - y(t)^2}$.

On verra que $y(t) = \pm 3 \sin(t + c)$ est la solution générale. Or $y(t) = \pm 3$ sont aussi des solutions, mais elles ne font pas partie de la famille des solutions données par la solution générale. Cela est dû au fait que le théorème des fonctions implicites fait défaut en $y'(t) = 0$.

Informellement, la *famille de solutions générales* est l'ensemble des solutions que l'on peut trouver à l'aide d'une méthode appropriée, selon le contexte (p.ex. la séparation de variables). Les *solutions singulières* sont les solutions que cette méthode n'a pu trouver, par exemple à cause de restrictions comme supposer que $y(x) \neq 0$.

Exemple 1.2.3. $y' = y$. On sait déjà que les solutions de cette EDO bien connue sont de la forme $y(x) = Ce^x$ pour $C \in \mathbb{R}^*$. L'ensemble de fonctions

$$\mathcal{S} = \{y(x) = Ce^x \mid C \in \mathbb{R}^*\}$$

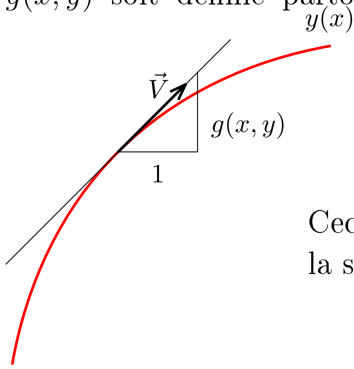
forme la famille de solutions générales. De plus, la fonction constante $y(x) \equiv 0$ est la solution singulière.

Voici les démarches pour arriver à ces conclusions. On utilise la séparation de variables, donc on a

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \\
\Leftrightarrow\ &\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \mathrm{d}x, && (y \neq 0) \qquad (*) \\
\Leftrightarrow\ &\log|y| = x + k, && (k \in \mathbb{R}) \\
\Leftrightarrow\ &|y| = e^k e^x, && (e^k \in \mathbb{R}^+) \\
\Leftrightarrow\ &y = \pm e^k e^x \\
\Leftrightarrow\ &y = Ce^x, \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

À la dernière ligne, on tombe sur toutes les solutions que cette méthode atteint; ce sont les solutions générales. Or, à la ligne $(*)$, pour obtenir l'implication, on doit supposer que $y \neq 0$. On voit que la fonction nulle $y \equiv 0$ satisfait à l'EDO, ce qui veut dire que la méthode de séparation de variables n'a pas pu la trouver.

Voici l'interprétation géométrique de la forme normale. Supposons que l'EDO $y' = g(x,y)$ soit définie partout dans le plan. On définit le vecteur $\vec{V}$ au point (x,y) par



$$\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+g(x,y)^2}} \\ \frac{g(x,y)}{\sqrt{1+g(x,y)^2}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ceci donne un vecteur unitaire (de longueur 1) tangent au graphe de la solution de l'EDO. En effet, le vecteur $\vec{V}(x,y)$ a pour pente

$$\left(\frac{g(x,y)}{\sqrt{1+g(x,y)^2}}\right) \Big/ \left(\frac{1}{\sqrt{1+g(x,y)^2}}\right) = g(x,y) = y'.$$

La fonction $\vec{V}$ est appelée un champ de vecteurs. Même si on ne connaît pas les solutions de $y' = g(x,y)$, on sait tout même la direction de la tangente en tout point.

On définit la notion de champ de vecteurs dans le plan.

Définition 1.2.4. Un *champ de vecteurs du plan* est une application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Elle sera habituellement notée $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{V}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ou $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. La notation avec une flèche ($\vec{V}$ ou $\vec{v}$) est utile pour faire ressortir le fait que $\vec{v}(x,y)$ est une *vecteur* et plutôt qu'un nombre réel, mais jamais obligatoire.

****

Un champ de vecteurs associe à chaque point (x,y) un vecteur $\vec{v}(x,y)$, donc une direction et une vitesse. On dira que le champ de vecteurs est de classe C^k si v_1 et v_2 sont de classe C^k, où $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix}$.

1.2.2 Techniques de résolution d'EDO d'ordre 1

Cette section présentera des techniques de résolution d'EDO d'ordre 1. À travers la section, il deviendra de plus en plus évident que résoudre une EDO est en général très difficile. Pour voir des méthodes plus sophistiquées, il faudrait suivre un cours d'équations différentielles plus avancé.

Les équations à variables séparables

Les équations les plus « simples » à résoudre sont les suivantes.

Définition 1.2.5. Une équation est dite *séparable* si elle de la forme $y' = \varphi(x)\psi(y)$.

****

Voici comment on peut établir que ces équations ont une solution.

Théorème 1.2.6. *Soit $y' = \varphi(x)\psi(y)$ une EDO séparable. Si φ et $\frac{1}{\psi}$ sont continues, alors la solution est donnée par l'équation implicite*

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\psi(y)} = \int \varphi(x)\mathrm{d}x + C.$$

Remarque. Caché dans les hypothèses, la supposition $\psi(y) \neq 0$ pour tout y est implicite. Il faut donc vérifier que cela est vraie avant d'utiliser le théorème!

****

Démonstration. Soit y une fonction de x qui vérifie l'équation implicite du théorème. Soit $G(y(x)) = \int \frac{y'(x)\mathrm{d}x}{\psi(y(x))}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(y(x)) &= \frac{y'(x)}{\psi(y(x))} \\ &= \frac{\psi(y(x))\varphi(x)}{\psi(y(x))} \\ &= \varphi(x).\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à x, on obtient

$$G(y(x)) = \int \varphi(x)\mathrm{d}x + C.$$

□

L'ensemble des y_0 tel que $\psi(y_0) = 0$ est un ensemble de solutions, car si $\psi(y_0) = 0$, alors la fonction constante $y(x) \equiv y_0$ satisfait bien $y'(x) = \psi(y_0)\varphi(x) = 0$.

Exemple 1.2.7. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x}{y}$.

On a

$$\int y\mathrm{d}y = \int x\mathrm{d}x,$$

donc $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.2.8. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x}$.

On voit ici que $y \equiv 0$, la fonction constante, est une solution. Maintenant supposons que $y \neq 0$ pour trouver les autres solutions. On a

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \log|y| &= \log|x| + c \\ |y| &= e^c|x|,\end{aligned}$$

donc on a $y(x) = \pm e^c x = kx$ avec $x \in (-\infty, 0)$ ou $x \in (0, +\infty)$ et $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.2.9. $y' = -\dfrac{y^2}{1+x}$.

On voit que $y \equiv 0$ est une solution. Supposons $y \neq 0$. On a

$$\begin{aligned} -\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} \\ \frac{1}{y} &= \log|1+x| + C \\ y(x) &= \frac{1}{\log|1+x| + C}, \qquad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

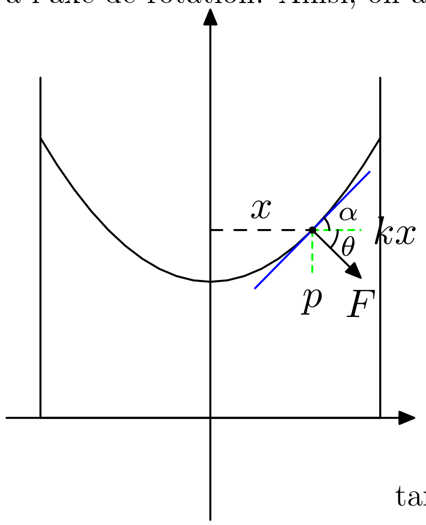
Remarque. Les deux exemples précédents illustrent bien comment se manifestent les solutions singulières. Rappelons qu'une solution est singulière lorsqu'elle ne fait pas partie de la famille de solutions. Ici, les solutions constantes $y \equiv 0$ ne pouvaient s'obtenir de la méthode de séparation de variables.

****

Exemple 1.2.10. *Silouhette de la surface d'un liquide en rotation.* On considère un cylindre contenant de l'eau. Le cycindre tourne sur son axe de symétrie. La force centrifuge donne une certaine forme à la surface de l'eau. L'intersection de la surface de l'eau avec un plan passant par l'axe de symétrie trace une courbe. Décrire l'allure de cette courbe.

On considère un élément infinitésimal de la courbe. Il y a deux forces qui agissent sur cet élément : son poids et la force centrifuge. Or, la somme des forces agit dans la direction perpendiculaire à la tangente à la courbe (sinon il y aurait une composante de force qui ferait bouger l'élément d'eau).

Le poids en constant, mais la force centrifuge est directement proportionnelle à la distance à l'axe de rotation. Ainsi, on a



$$F(x) = \begin{pmatrix} kx \\ p \end{pmatrix},$$

où k est une constante qui dépend de la vitesse de rotation et p est une constante qui représente le poids.

L'angle θ de F est satisfait à

$$\tan\theta = \frac{p}{kx}.$$

Soit α, l'angle de la tangente. Puisque F est perpendiculaire, on a $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, on a

$$\tan\alpha = \tan(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{kx}{p}.$$

De plus, on sait que

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan\alpha = \frac{kx}{p}.$$

On conclut que la courbe a la forme

$$y(x) = \frac{k}{p}x^2 + C.$$

Exemple 1.2.11. $mx''(t) = mg - ax'(t)$.

Posons $v(t) = x'(t)$ (vitesse). On a

$$mv'(t) = mg - av(t),$$

qui est séparable. On obtient

$$\begin{aligned}
\int \frac{m}{mg - av}\mathrm{d}v &= \int \mathrm{d}t \\
-\frac{m}{a}\log|mg - av| &= t + c \\
\log|mg - av| &= -\frac{at}{m} + c \\
|mg - av| &= e^c e^{-\frac{at}{m}} \\
mg - av &= \pm e^c e^{-\frac{at}{m}} \\
&= De^{\frac{-at}{m}}, \qquad D = \pm e^c \neq 0.
\end{aligned}$$

La solution générale est $v(t) = \frac{mg - De^{-\frac{at}{m}}}{a}$ avec $D \neq 0$. On remarque que dans le cas où $D = 0$, $v(t) = \frac{mg}{a}$ est la solution singulière constante, donc on a, en fait, $D \in \mathbb{R}$.

Ensuite, on doit résoudre $x'(t) = v(t)$. On a

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{mg - De^{-\frac{at}{m}}}{a} \\ \Rightarrow x(t) &= \int \frac{mg - De^{-\frac{at}{m}}}{a} \mathrm{d}t \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{mgt + \frac{Dm}{a}e^{-\frac{at}{m}}}{a} + C. \end{aligned}$$

Changement de variable $u = \frac{y}{x}$

Si une EDO $F(x, y, y') = 0$ peut s'écrire sous la forme $y' = f(y/x)$, alors on peut effectuer le changement de variable $u = \frac{y}{x}$. Ainsi, on a $xu = y$ et en dérivant, on obtient

$$y' = f(u) = u + xu'$$

qui est parfois plus simple à résoudre.

Exemple 1.2.12. $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{x+y}{x-y}$.

Avec $u = \frac{y}{x}$, on obtient

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} + \frac{x+y}{x-y} \\ &= \frac{y}{x} + \frac{x(1+\frac{y}{x})}{x(1-\frac{y}{x})} \\ &= u + \frac{x(1+u)}{x(1-u)}. \end{aligned}$$

Puisque $y' = u + xu'$, on a

$$u + xu' = u + \frac{1+u}{1-u},$$

qui est à variable séparable. Ainsi, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int \frac{1-u}{1+u} \mathrm{d}u &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\ \log|1+u| - \int \frac{u}{1+u} \mathrm{d}u &= \log|x| + c \\ \log|1+u| - 1 - u + \log|1+u| &= \\ 2\log\left|1 + \tfrac{y}{x}\right| - 1 + \frac{y}{x} &= \log|x| + c. \end{aligned}$$

Ceci donne la solution sous forme implicite.

Changement de variable $u = ax + by$

Supposons que l'EDO s'écrit $y' = f(ax + by)$. Posons $u(x) = ax + by(x)$:

$$\Rightarrow u' = a + by'$$

$$\Rightarrow u' = a + bf(u).$$

La nouvelle EDO $u' = a + bf(u)$ est parfois plus facile à résoudre.

Exemple 1.2.13. $y' = (x + 4y)^2$.

Posons $u = x + 4y$:

$$y = \frac{u - x}{4}$$

$$y' = \frac{u' - 1}{4} = (x + 4y)^2 = u^2.$$

On a donc $u' = 1 + 4u^2$, ce qui se résout par séparation de variable comme suit :

$$\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}u}{1 + 4u^2} = \int \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \arctan w = x + c \qquad \begin{matrix} w = 2u \\ \mathrm{d}w = 2\mathrm{d}u \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \arctan(2u) = x + c$$

$$\Rightarrow \arctan\big(2(x + 4y)\big) = 2x + k \qquad (k := 2c)$$

$$\Rightarrow 2x + 8y = \tan(x + k)$$

$$\Rightarrow y = \frac{\tan(x + k) - 2x}{8}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Équations exactes

Considérons $\varphi(x, y) = k$ comme une solution implicite générale d'une EDO de la forme $y' = f(x, y)$. Les courbes de niveau de φ sont les courbes intégrales de l'EDO (le « graphe » des solutions).

Inversement, considérons une fonction $\varphi\colon (x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ et considérons ses courbes de niveau $\varphi(x, y) = C$ pour $C \in \mathbb{R}$. En dérivant de chaque côté, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x, y(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}C$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}y' = 0.$$

C'est une EDO qui a $\varphi(x,y) = C$ comme solution générale.

Considérons une EDO de la forme $p(x,y) + q(x,y)y' = 0$.

Question. Est-il possible de trouver une fonction φ de sorte que $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = q$? Autrement dit, existe-t-il φ telle que $\nabla\varphi = (p,q)$?

Lorsque la réponse est oui, on dit que l'EDO est *exacte*.

Lemme 1.2.14. *Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine et soit $p, q \colon D \to \mathbb{R}^2$ deux fonctions de classe C^1. Si l'EDO $p(x,y) + q(x,y)y' = 0$ est exacte, alors*

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}. \qquad \textit{(Condition d'intégrabilité)}$$

Démonstration. Comme l'EDO est exacte, il existe φ telle que $p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$. Le théorème de Schwarz nous donne

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

□

La réciproque **est fausse**, c'est-à-dire que la condition d'intégrabilité n'est pas suffisante pour conclure que l'équation est exacte.

Contre-exemple. Soit

$$p(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \text{et} \qquad q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. Alors, un petit calcul montre que

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$

mais il n'existe aucune φ de sorte que $\nabla\varphi = (p,q)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$. En effet, si une telle fonction devait exister, ce serait $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, mais elle n'est pas bien définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$.

Le problème du contre-exemple est le point à l'origine. Les fonctions p, q se comportent mal dans un voisinage de $(0,0)$, donc il faut « trouer » le domaine. Le contre-exemple peut donc sembler artificiel, mais il est plutôt universel et se trouve au cœur de l'analyse complexe.

On peut énoncer un cas particulier où la réciproque est vraie. La démonstration serait faite dans un cours de calcul vectoriel.

Théorème 1.2.15. *Soit $p, q \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Si p et q satisfont à la condition d'intégrabilité du lemme 1.2.14, alors il existe φ telle que $\nabla\varphi = (p,q)$ sur $\mathbb{R}^2$.*

Exemple 1.2.16. $y' = \dfrac{y\sin(xy)}{1 - x\sin(xy)}$.

On peut réécrire l'équation $-y\sin(xy) + (1 - x\sin(xy))y' = 0$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(-y\sin(xy)) &= -\sin(xy) - xy\cos(xy)\\ \frac{\partial}{\partial x}(1 - x\sin(xy)) &= -\sin(xy) - xy\cos(xy).\end{aligned}$$

Comme le champ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, l'EDO est exacte. On cherche à résoudre $\nabla\varphi = (p, q)$, donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -y\sin(xy) \Rightarrow \int \frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x = -\int y\sin(xy)\mathrm{d}x,$$

ce qui donne $\varphi(x, y) = \cos(xy) + h(y)$. Ici la « constante d'intégration » est une fonction qui dépend de y, car on a intégré par rapport à x seulement. On dérive cette équation pour obtenir

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos(xy) + h(y)) = -x\sin(xy) + h'(y).$$

On a également l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = (1 - x\sin(xy)),$$

donc en combinant, on trouve

$$h'(y) = 1.$$

On conclut que $\varphi(x, y) = y + \cos(xy) + C$.

Facteurs intégrants (ou exactifiant)

Il est parfois possible d'ajouter un facteur $\mu(x, y)$ à l'EDO pour la rendre exact. Une telle fonction est appelée *facteur intégrant*. Ainsi, on regarde à l'équation

$$\mu(x, y)p(x, y) + \mu(x, y)q(x, y)y' = 0.$$

Cette méthode est seulement utile s'il est possible de rendre exacte l'équation en prenant un μ qui dépend seulement soit de x, soit de y.

Exemple 1.2.17. . $xy + 2xy' = 0$. Notons dès maintenant que l'équation se résout par séparation de variables, mais on choisit d'utiliser la méthode du facteur intégrant pour illustrer son utilisation.

1. On vérifie si l'équation est exacte. On a

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x \neq \frac{\partial}{\partial x}(2x) = 2.$$

2. On vérifie si l'on peut multiplier l'équation par un $\mu(y)$ pour la rendre exacte : $xy\mu(y) + 2x\mu(y)y' = 0$. On a

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy\mu(y)) = x\mu + xy\mu' \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(2x\mu(y)) = 2\mu.$$

On veut obtenir l'égalité

$$x\mu + xy\mu' = 2\mu,$$

mais cette équation ne fait pas intervenir que des y, donc il est faux de supposer que μ puisse dépendre *seulement* de y.

3. On vérifie la même chose pour x : $xy\mu(x) + 2x\mu(x)y' = 0$. On a

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy\mu(x)) = x\mu \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial}{\partial x}(2x\mu(x)) = 2\mu + 2x\mu'.$$

On veut obtenir l'égalité

$$x\mu = 2\mu + 2x\mu'.$$

Ça fonctionne! Il n'y a plus de y. On doit résoudre la nouvelle EDO $x\mu = 2\mu + 2x\mu'$. On a

$$\begin{aligned}
&2x\mu' = x\mu - 2\mu \\
\Rightarrow &\int \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \int \frac{x-2}{2x}\mathrm{d}x \\
\Rightarrow &\log|\mu| = \frac{x}{2} - \log|x| + C \\
\Rightarrow &|\mu| = \frac{e^c e^{\frac{x}{2}}}{|x|} \\
\Rightarrow &\mu = k\frac{e^{\frac{x}{2}}}{|x|}, \qquad k \in \mathbb{R}^*.
\end{aligned}$$

4. Nouvelle EDO. Notre EDO de départ devient

$$xyk\frac{e^{\frac{x}{2}}}{|x|} + 2xk\frac{e^{\frac{x}{2}}}{|x|}y' = 0.$$

Constatons qu'il n'était pas nécessaire d'introduire la constante k, car on peut maintenant diviser l'équation par k et donc l'ignorer. De la même façon, on peut ignorer la valeur absolu du x, car on peut multiplier l'équation par -1 au besoin. On se concentre donc sur la nouvelle équation simplifiée

$$ye^{\frac{x}{2}} + 2e^{\frac{x}{2}}y' = 0$$

qui est exacte.

5. Trouver φ. On cherche une fonction $\varphi\colon (x,y) \mapsto \varphi(x,y)$ telle que

$$\varphi_x := \frac{\partial \varphi}{\partial x} = ye^{\frac{x}{2}}$$
$$\varphi_y := \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2e^{\frac{x}{2}}.$$

On a

$$\begin{aligned} &\varphi_x = ye^{\frac{x}{2}} \\ \Rightarrow &\int \varphi_x \mathrm{d}x = \int ye^{\frac{x}{2}} \mathrm{d}x \\ \Rightarrow &\varphi = 2ye^{\frac{x}{2}} + h(y). \end{aligned}$$

On dérive cette dernière équation par rapport à y pour obtenir $\varphi_y = 2e^{\frac{x}{2}} + h'(y)$. On combine avec l'autre expression de φ_y

$$\varphi_y = 2e^{\frac{x}{2}} + h'(y) = 2e^{\frac{x}{2}},$$

donc $h'(y) = 0$.

5. On conclut que $\varphi(x,y) = 2ye^{\frac{x}{2}} + C$ est la fonction recherchée. Comme on peut isoler y, on peut trouver la solution explicite, qui est $y = \frac{K}{2}e^{\frac{-x}{2}}$.

1.2.3 Systèmes à deux équations, courbes et longueur d'arc

On commence dès maintenant à se familiariser avec les systèmes d'EDO. On obtient un système d'EDO lorsqu'un modèle nécessite plus d'une variables dépendantes. Par exemple, la position d'une particule dans l'espace se décrit par trois variables.

Exemple 1.2.18. On lance une balle à partir de l'origine avec une vitesse initiale de $(1, 1)$. Pour décrire sa trajectoire, on doit décrire le mouvement le long de l'axe des x et des axes de y. On utilise deux fois les lois de Newton.

Le long de l'axe des x, aucune force n'est appliquée, donc on a

$$x''(t) = 0.$$

Le long de l'axe des y, la force de gravité tire vers le bas

$$y''(t) = -C,$$

où C est une constante positive. On obtient donc le système

$$\begin{cases} x''(t) = 0, \\ y''(t) = -C. \end{cases}$$

Un système à deux équations d'ordre 1 aura la forme

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x,y), \\ y'(t) = g(t,x,y). \end{cases} \tag{$*$}$$

Une solution sera une paire de fonctions $(x,y) = \big(x(t), y(t)\big)$ qui vérifie le système.

Une solution du système $(*)$ possède une interprétation géométrique primordiale. Dans le plan xy, une solution $(x,y) = \big(x(t), y(t)\big)$ trace une *courbe*.

Définition 1.2.19. Une *courbe* dans le plan est une fonction $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^2$ continue, où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle. L'image $\varphi(I) \subseteq \mathbb{R}^2$ s'appelle la *trace* de la courbe. On appelle φ un *paramétrage* de la trace.

****

Remarque. Par abus de language, on appelle souvent la trace elle-même la courbe. Dans ce cas, on dira que φ est un paramétrage de la courbe.

****

Si $(x,y) = \big(x(t), y(t)\big)$ est une courbe solution du système d'EDO, alors la dérivée (x', y') est un *vecteur tangent à la courbe*. De plus, la règle de dérivation en chaîne nous donne

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)}.$$

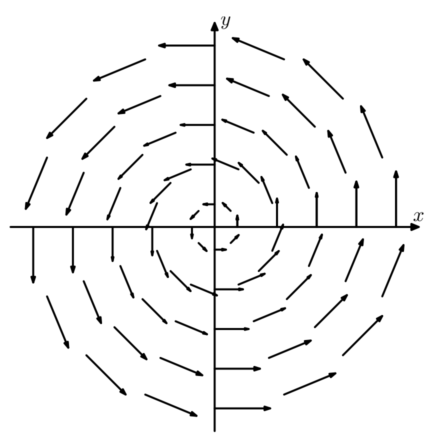
Si le côté droit de cette équation ne dépend pas de t, cela nous aide à résoudre le système.

Exemple 1.2.20. Après avoir brassé son café, la vitesse en tout point des particules à la surface du liquide au temps t est donnée par

$$V(t,x,y) = \begin{pmatrix} -e^{-t}y \\ e^{-t}x \end{pmatrix}.$$

Un grain de poussière se dépose à la surface du café et sa vitesse suit parfaitement celle du liquide. Trouver la trajectoire de la particule.

Voici le champ de vitesse à un temps t fixé. Ensuite, losque le temps augmente, les flèches pointent dans la même direction, mais leur longueur diminue, à cause du facteur e^{-t}.



On doit résoudre le système

$$\begin{cases} x'(t) = -e^{-t}y, \\ y'(t) = e^{-t}x. \end{cases}$$

On voit que la pente de la tangente aux courbes solutions est donnée par

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{x}{y}.$$

Cette équation est plus simple à résoudre, donc on trouve d'abord sa solution. Par séparation de variable, on a

$$y^2 + x^2 = C.$$

Les trajectoires sont donc en forme de cercles cocentriques. Mais cela ne constitue pas la solution.

On se doute que la solution aura la forme

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(g(t)) \\ r\sin(g(t)) \end{pmatrix},$$

où c, d sont à déterminer. En remplaçant dans le système, on trouve $g(t) = e^{-t}$. Ainsi, la solution est

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(e^{-t}) \\ r\sin(e^{-t}) \end{pmatrix},$$

Une EDO d'ordre supérieur se ramène à un système d'EDO d'ordre 1, comme on le voit dans l'exemple suivant.

Exemple 1.2.21. On considère le modèle des petites oscillations du pendule simple

$$x''(t) = -x(t).$$

On pose $u_0(t) = x(t)$ et $u_1(t) = x'(t)$. En dérivant u_0 et u_1, on obtient le système

$$\begin{cases} u_0'(t) = u_1(t), \\ u_1'(t) = -u_0(t). \end{cases}$$

La pente est donc

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}u_0} = \frac{u_1'(t)}{u_0'(t)} = -\frac{u_0}{u_1}.$$

On trouve $u_1^2 + u_0^2 = C^2$ comme dans l'exemple précédent. Les solutions sont de la forme $u_1(t) = C\cos(g(t))$ et $u_0(t) = C\sin(g(t))$. On peut vérifier que $g(t) = t$ fonctionne. Puisque que $x(t) = u_0(t)$, on voit que $x(t) = C\sin(t)$ est une famille de solutions de l'EDO de départ.

En fait, $x(t) = D\cos t$ est une autre famille de solutions. Cela est dû au fait que l'EDO de départ est d'ordre 2.

Exemple 1.2.22. *Chute libre avec frottement*. La position se modélise par

$$x''(t) = -mg + C\big(x'(t)\big)^2, \tag{E}$$

où C est une constante.

On pose

$$\begin{aligned} u_0(t) &= x(t), \\ u_1(t) &= x'(t), \end{aligned}$$

et on obtient ainsi deux variables dépendantes : une variable de position et une variable de vitesse. L'équation de départ devient maintenant un système d'ordre 1 :

$$(*) \qquad \begin{cases} u_0'(t) = u_1(t) \\ u_1'(t) = -mg + C\big(u_1(t)\big)^2. \end{cases}$$

Si $(u_0, u_1) = \big(u_0(t), u_1(t)\big)$ est une solution du système $(*)$, alors la pente de la tangente est

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}u_0} = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u_0} = \frac{u_1'(t)}{u_0'(t)} = \frac{-mg + Cu_1^2}{u_1},$$

par la règle de dérivation en chaîne. On voit que c'est la même pente que celle des vecteurs du champ de vecteurs.

Supposons que l'on veuille connaître la distance parcourue par une particule dans la plan. Si la particule suit la courbe $\varphi(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, on peut trouver la longueur de la courbe comme suit.

Définition 1.2.23. Soit $\varphi \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe de classe C^1 de la forme $\varphi(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. On définit sa *longueur* par

$$\ell(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'\| = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

****

Exemple 1.2.24. *Circonférence d'un cercle de rayon r*. On paramétrise un cercle de rayon r et de centre $(x_0, y_0)^T$ par $f(t) = (x_0 + r\cos t, y_0 + r\sin t)^T$, avec $t \in [0, 2\pi]$.

On a

$$\begin{aligned} f'(t) &= (-r\sin t, r\cos t), \\ \|f'(t)\| &= \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} = r, \\ \Rightarrow L(f) &= \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}t = 2\pi r. \end{aligned}$$

Exemple 1.2.25. *Longueur d'un segment de droite dans le plan.* Une droite dans le plan possède la forme générale

$$f(t) = \begin{pmatrix} at+b \\ ct+d \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Si l'on restreint t à l'intervalle $[0,1]$, alors on obtient le segment de droite joignant les points (b,d) et $(a+b, c+d)$ dans $\mathbb{R}^2$.

La longueur de ce segment est donnée par

$$L = \int_0^1 \|f'(t)\| \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{a^2+c^2} \mathrm{d}t = a^2 + c^2.$$

Cela est cohérent avec la formule

$$L = \|(b,d) - (a+b, c+d)\| = \sqrt{a^2+c^2}.$$

Exemple 1.2.26. Une balle roule et se déplace à une vitesse suivant le champ de vecteurs

$$V(t,x,y) = \frac{2}{\sqrt{a(t)^2+b(t)^2}} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Déterminer la distance parcourue au temps t.

On voit que

$$\|V(t,x,y)\| = 2\frac{\sqrt{a(t)^2+b(t)^2}}{\sqrt{a(t)^2+b(t)^2}} = 2.$$

Puisque la vitesse est constante, la distance parcourue est simplement $2t$. (La vitesse multipliée par le temps.)

1.3. Équations linéaires du premier ordre

On étudie un type particulier, mais très important, d'EDO.

Définition 1.3.1. L'EDO $y' = f(x,y)$ est dite *linéaire* si $f(x,y) = p(x)y + q(x)$, c'est-à-dire que f est un polynôme de degré un en y. Elle est dite *homogène* si $q(x) = 0$ pour tout x. Sinon, elle est dite *inhomogène*.

****

Le théorème d'existence et d'unicité des solutions garantit l'existe d'une solution.

Corollaire 1.3.2. *L'EDO linéaire $y' = p(x)y + q(x)$ possède une solution si p et q sont de classe C^1.*

Démonstration. Il suffit de constater qu'alors, $f(x,y) = p(x)y + q(x)$ est de classe C^1, donc tout problème de Cauchy associé à cette équation possède une solution sur un certain intervalle.

□

Pour *trouver* les solutions, on étudie séparément les cas $q \equiv 0$ et $q \not\equiv 0$.

1.3.1 Équation homogène

Étant donné leur forme rigide, on peut en dire un peu plus sur une EDO linéaire homogène que sur une équation quelconque.

Dans le lemme, on utilise la notation $C^1[a,b]$: une fonction p de classe $C^1[a,b]$ est une fonction définie sur au moins l'intervalle $[a,b]$ et de classe C^1 sur $[a,b]$.

Lemme 1.3.3. *Soit l'EDO $y' = p(x)y$ homogène. Si p est de classe $C^1[a,b]$, alors l'ensemble des solutions*

$$\mathcal{S} = \{y \in C^1[a,b] : y' = p(x)y,\ x \in [a,b]\}$$

forme un espace vectoriel réel de dimension 1.

Avant de faire la démonstration, prenons un instant pour observer les implications du lemme. Si $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel réel, alors étant donné une solution $y \in \mathcal{S}$, on aura également $\lambda y \in \mathcal{S}$ pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$. De plus, puisque sa dimension est de 1, toutes les solutions sont équivalentes à facteurs scalaires près, c'est-à-dire que pour deux solutions $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$, il existe un scalaire λ tel que $y_2 = \lambda y_1$. Ou autrement dit, si on a trouvé une solution $y \not\equiv 0$, alors toutes les autres solutions sont données par λy, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $y_1, y_2 \in \mathcal{S}$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Commençons par montrer que $y := \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \in \mathcal{S}$.

Il est clair que y est de classe C^1 et définie sur $[a,b]$. Ensuite, en dérivant, on a

$$\begin{aligned} y' &= \alpha_1 y_1' + \alpha_2 y_2' \\ &= \alpha_1 p(x) y_1 + \alpha_2 p(x) y_2 \\ &= p(x)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\ &= p(x) y, \end{aligned}$$

donc y est une solution de $y' = p(x)y$, d'où $y \in \mathcal{S}$. On conclut que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.

(*1ère méthode*) Pour montrer que $\mathcal{S}$ est de dimension 1, on utilise le théorème d'existence et d'unicité. Soit $y \in \mathcal{S}$ une solution non constante et $z \in \mathcal{S}$ une autre solution. Puisque y est non constante, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $y(x_0) \neq 0$. On pose

$$u(x) = \frac{z(x_0)}{y(x_0)} y(x).$$

Ainsi, u et z sont deux solutions au problème de Cauchy

$$\begin{cases} w' = p(x)w; \\ w(x_0) = z(x_0). \end{cases}$$

Par le théorème d'existence et d'unicité, on a $u = z$, donc $z(x_0)y = y(x_0)z$. D'où $\mathcal{S}$ est de dimension 1.

(*2e méthode*) On sait que $y(x) = e^{\int_0^x p}$ est une solution. Soit z une autre solution. Puisque $y(x) \neq 0$ pour tout x, on a

$$\left(\frac{z}{y}\right)' = \frac{z'y - yz'}{y^2} = \frac{pzy - pyz}{y^2} = 0.$$

Ainsi, on conclut que $\frac{z}{y} = C$, une constante, c'est-à-dire que $z = Cy$.

$\square$

On peut trouver la solution de l'équation homogène simplement par séparation de variables. On a

$$\begin{aligned}
& y' = p(x)y \\
\Rightarrow\ & \frac{y'}{y} = p(x) \\
\Rightarrow\ & \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int p(x)\mathrm{d}x + c \\
\Rightarrow\ & \log|y| = \int p(x)\mathrm{d}x + c \\
\Rightarrow\ & |y| = e^c \exp\big(\textstyle\int p(x)\mathrm{d}x\big) \\
\Rightarrow\ & y = \pm e^c \exp\big(\textstyle\int p(x)\mathrm{d}x\big) \\
\Rightarrow\ & y = K \exp\big(\textstyle\int p(x)\mathrm{d}x\big)\,, \qquad K \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Par le lemme 1.3.3, on sait que toutes les solutions ont été trouvées. On choisit comme base de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ le vecteur $\varphi(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t}$. Toutes les autres solutions s'écrivent comme $K\varphi$. On peut aussi dire que φ *engendre l'espace vectoriel* ou bien que $\mathcal{S}$ *est engendré par* φ.

1.3.2 Équation inhomogène

On traite maintenant du cas un peu plus compliqué. On ne peut pas résoudre l'équation inhomogène $y' = p(x)y + q(x)$ par séparation de variable. Commençons par décrire l'espace des solutions.

Lemme 1.3.4. *(Principe de superposition) Soit y_1 et y_2 deux solutions de $y' = p(x)y+q(x)$. Alors $y_3 = y_2 - y_1$ est une solution de l'équation homogène $y = p(x)y$.*

Démonstration. On dérive simplement y_3 pour obtenir

$$\begin{aligned}
y_3' &= y_2' - y_1' \\
&= (p(x)y_2 + q(x)) - (p(x)y_1 + q(x)) \\
&= p(x)y_2 - p(x)y_1 \\
&= p(x)(y_2 - y_1) \\
&= p(x)y_3.
\end{aligned}$$

□

On sait que $y_3 = C\exp\big(\int p(x)\mathrm{d}x\big)$, donc on obtient la conséquence suivante

$$y_2(x) = y_1(x) + C\exp\big(\textstyle\int p(x)\mathrm{d}x\big)\,.$$

Comme deuxième conséquence, on déduit que toutes les solutions de l'équation inhomogène sont obtenues comme-ci. En effet, si y_4 était une autre solution, alors la même procédure montrerait que $y_4 = y_1 + C_4 e^{\int p(x)\mathrm{d}x}$.

Définition 1.3.5. Soit y_h une solution non constante de $y' = p(x)y$. On l'appelle *la solution homogène* de $y' = p(x)y + q(x)$. Une solution de $y' = p(x)y + q(x)$ est appelée une *solution particulière* et est notée y_p.

****

Avec la terminologie de la définition, la solution générale de $y' = p(x)y + q(x)$ est de la forme $y = y_h + y_p$. On sait déjà trouver y_h. On montre maintenant une technique qui permet de trouver une solution particulière.

Lemme 1.3.6. *(Variation du paramètre) Soit P une primitive donnée de p (c-à-d que $P'(x) = p(x)$). Alors il existe une fonction dérivable u pour laquelle $z(x) := u(x)e^{P(x)}$ est une solution de $y' = p(x)y + q(x)$.*

Remarque. Le terme « variation du paramètre » s'explique par le fait qu'on fait varier la constante C en fonction de x dans l'expression de la solution homogène $Ce^{\int p(x)\mathrm{d}x}$.

****

Démonstration. Supposons qu'une telle u existe et dérivons z. On a

$$\begin{aligned} z &= u(x)e^{P(x)} \\ \Rightarrow z' &= u'e^{P(x)} + up(x)e^{P(x)}. \end{aligned}$$

Ensuite, comme z est une solution, on a aussi $z' = p(x)z + q(x)$. En remplaçant la dérivée ci-haut dans l'EDO de départ, on a

$$\begin{aligned} u'e^{P(x)} + up(x)e^{P(x)} &= p(x)\left(ue^{P(x)}\right) + q(x) \\ \Rightarrow u'e^{P(x)} &= q(x). \end{aligned}$$

La fonction u recherchée est

$$u(x) = \int q(x)e^{-P(x)}\mathrm{d}x.$$

Cette fonction est dérivable par le théorème fondamentale du calcul.

□

Remarque. On a utilisé le symbole de l'intégrale au sens où on « prend une primitive quelconque ». Si l'on veut être rigoureux, on peut écrire toutes ces intégrales avec leurs bornes pour obtenir la solution générale sous la forme

$$y(x) = C\exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)\mathrm{d}t\right) + \int_{x_0}^{x} q(t)\exp\left(-\int_{x_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t.$$

Ici, les variables s et t sont muettes; leur seul rôle est d'être intégré et elles peuvent ainsi être remplacées par n'importe quels symboles autre que x.

****

Exemple 1.3.7. $y' = -\frac{1}{x}y + 1, \qquad (x > 0).$

(Notons que cette équation se résout aussi par le changement de variable $u = \frac{y}{x}$.)

1. Solution homogène : on a

$$\begin{aligned}
& y' = -\frac{y}{x} \\
\Rightarrow\ & \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\Rightarrow\ & \log|y| = -\log|x| + k \\
\Rightarrow\ & |y| = \frac{e^k}{|x|} \\
\Rightarrow\ & y = \pm\frac{e^k}{|x|} \\
\Rightarrow\ & y = \frac{C}{|x|} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}^* \\
\Rightarrow\ & y_h = \frac{C}{x}. && \text{(car } x > 0\text{)}
\end{aligned}$$

2. Solution particulière : on pose $y_p = u(x)y_h = \frac{u(x)}{x}$, en prenant $C = 1$. On a

$$y_p' = \frac{u'}{x} - \frac{u}{x^2}$$

et

$$\begin{aligned}
y_p' &= p(x)y_p + q(x) \\
&= -\frac{1}{x}y_p + 1 \\
&= -\frac{u}{x^2} + 1.
\end{aligned}$$

On obtient $\frac{u'}{x} = 1$, donc $u = \frac{x^2}{2}$. La solution particulière est $y_p = \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$.

3. Solution générale : $y(x) = y_h + y_p = \dfrac{C}{x} + \dfrac{x}{2}$.

1.4. Équations d'ordre supérieur

Les équations du deuxième ordre prennent la forme la plus générale par

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

où $F\colon (x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto F(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1. Par le théorème des fonctions implicites, on peut se concentrer sur le cas

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

pourvu que $\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}$ est non nulle.

1.4.1 Réduction d'ordre

Il est parfois possible de se ramener à une équation d'ordre moins grand. Il est toujours possible de se ramener à *un système* d'équations d'ordre 1.

1^er^ cas. Lorsque $y, \dots, y^{(n-2)}$ sont absentes.

Lorsque l'EDO prend la forme $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$, alors on pose $z(x) = y^{(n-1)}(x)$. Ainsi, on obtient

$$z'(x) = y^{(n)}(x) = f(x, z).$$

La nouvelle EDO, $z' = f(x, z)$, est d'ordre 1.

Dans le cas d'ordre 2, on a $y'' = f(x, y')$ et on pose $z(x) = y'(x)$. Ainsi, on obtient

$$z'(x) = y''(x) = f(x, z).$$

Exemple 1.4.1. $y'' + 2xy' = -x$. Cette équation ne dépend pas de y. On pose $z(x) = y'(x)$. L'EDO devient

$$z' + 2xz = -x.$$

On la résout par séparation de variables. On a

$$\begin{aligned}
& z' = -2xz - x \\
\Rightarrow\ & z' = -x(1 + 2z) \\
\Rightarrow\ & \int \frac{\mathrm{d}z}{1 + 2z} = -\int x \mathrm{d}x \\
\Rightarrow\ & \log|1 + 2z| = -x^2 + k \\
\Rightarrow\ & |1 + 2z| = e^k e^{-x^2} \\
\Rightarrow\ & 1 + 2z = Ce^{-x^2} && (C := \pm e^k) \\
\Rightarrow\ & z = De^{-x^2} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Attention, ceci n'est pas la solution! On doit maintenant résoudre $z = y'$. On a

$$\begin{aligned}
y' &= De^{-x^2} - \frac{1}{2} \\
\Rightarrow y(x) &= \int_{x_0}^{x} \left(\frac{-1}{2} + De^{-t^2} \right) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{x}{2} + \frac{x_0}{2} + D \int_{x_0}^{x} e^{-t^2} \mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Cette dernière intégrale n'a aucune expression donnée à partir de fonctions élémentaires, donc on la laisse ainsi.

2ᵉ cas. Lorsque $x, y, \ldots, y^{(n-2)}$ est absent.

Lorsque l'EDO prend la forme $y^{(n)} = f(y^{(n-2)}, y^{(n-1)})$, on pose $z\big(y^{(n-2)}(x)\big) = y^{(n-1)}(x)$. Ainsi on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} z\big(y^{(n-2)}(x)\big) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y^{(n-2)}} \frac{\mathrm{d}y^{(n-2)}}{\mathrm{d}x} = z'\, z = y^{(n)} = f(y^{(n-2)}, y^{(n-1)}).$$

Ceci nous donne l'EDO d'ordre un $z'(u)z(u) = f(u, z)$, où $u = y^{(n-2)}$, pour alléger.

Dans le cas d'ordre 2, on a $y'' = f(y, y')$ et on pose $z\big(y(x)\big) = y'(x)$. Ainsi on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} z\big(y(x)\big) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z'\, z = y'' = f(y, y').$$

Ceci nous donne l'EDO d'ordre un $z'(y)z(y) = f(y, z)$.

Exemple 1.4.2. $y'' = \dfrac{y'}{y^2}$. La variable x n'apparaît pas explicitement dans cette équation. On pose $z(y(x)) = y'(x)$. On a

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} z = y'' = \frac{y'}{y^2} = \frac{z}{y^2}.$$

Pour résoudre, on fait

$$\begin{aligned} z' z &= \frac{z}{y^2} \\ \Rightarrow z' &= \frac{1}{y^2} \\ \Rightarrow \int \mathrm{d}z &= \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} \\ \Rightarrow z &= -\frac{1}{y} + C. \end{aligned}$$

Ensuite, on doit résoudre $y' = z(y) = -\frac{1}{y} + C$. On a

$$\begin{aligned} y' &= z \\ \Rightarrow y' &= -\frac{1}{y} + C \\ &= \frac{-1 + Cy}{y} \\ \Rightarrow \int \frac{y}{Cy - 1} \mathrm{d}y &= \int \mathrm{d}x \\ \Rightarrow \frac{1}{C^2} \int \frac{u+1}{u} \mathrm{d}u &= x + D \end{aligned} \qquad \boxed{\begin{aligned} u &= Cy - 1 \\ \mathrm{d}u &= C\mathrm{d}y \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C^2}(u + \log|u|) = x + D$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C^2}\big(Cy - 1 + \log|Cy - 1| \big) = x + D.$$

La solution est implicite. On ne peut isoler y.

Les autres cas. Pour une équation quelconque $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, on pose

$$\begin{cases} u_0(x) = y(x) \\ u_1(x) = y'(x) \\ \quad\vdots \\ u_{n-1}(x) = y^{(n-1)} \end{cases}$$

et on obtient le système

$$\begin{cases} u_0' = u_1 \\ u_1' = u_2 \\ \quad\vdots \\ u_{n-1}' = f(x, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}) \end{cases}$$

Pour l'ordre deux, on a $y'' = f(x, y, y')$, on pose

$$\begin{cases} u_0(x) = y(x) \\ u_1(x) = y'(x) \end{cases}$$

et on obtient le système

$$\begin{cases} u_0' = u_1 \\ u_1' = f(x, u_0, u_1). \end{cases}$$

Exemple 1.4.3. $y'' - \lambda^2 y = 0$. Ceci est l'équation des ondes en une dimension (une corde vibrante). On pose $u_0 = y$ et $u_0 = y'$. On obtient le système

$$\begin{cases} u_0' = u_1; \\ u_1' = \lambda^2 u_0. \end{cases}$$

1.4.2 Existence et unicité des solutions

Dans tout le travail accompli jusqu'à maintenant, on s'est très peu soucié de la possibilité qu'une EDO n'ait aucune solution. Cette section indique qu'il n'est jamais vain de chercher des solutions dès que l'EDO est *suffisamment régulière*. (Dans bien des cas, ceci se traduit par « de classe C^1 ».)

Exemple 1.4.4. L'EDO $y' = y$ possède la famille de solutions $y(x) = Ce^x$, où $C \in \mathbb{R}$. Il y a une infinité de solutions.

Comment formuler l'unicité alors qu'il peut y avoir une infinité de solutions? Il n'est pas rare que dans un problème, on cherche une solution spécifique qui satisfait à une *condition initiale*.

Exemple 1.4.5. On considère la solution générale $y = Ce^x$ de l'EDO $y' = y$. La solution spécifique qui satisfait à la condition $y(0) = 1$ est $y = e^x$. C'est la solution au problème à valeur initiale

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Définition 1.4.6. Soit $F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0$ une EDO d'ordre n. Soit $x_0, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ des constantes. On appelle le système suivant

$$\begin{cases} \text{EDO d'ordre } n \\ F(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1, \\ \quad \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Système d'ordre 1} \\ u_0 = f_1(x, u_0, \ldots, u_n) \\ \quad \vdots \\ u_n = f_n(x, u_0, \ldots, u_n) \\ u_0(x_0) = y_0, \ldots, u_n(x_0) = y_n, \end{cases}$$

des *problèmes de Cauchy*.

****

Exemple 1.4.7. La vitesse d'une particule est donnée par l'EDO $x'(t) = \frac{x}{t}$. Trouver sa trajectoire, sachant qu'elle passe par $x = 1$ lorsque $t = \frac{1}{2}$.
Solution. Le problème se traduit au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{t} \\ x\left(\frac{1}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

L'EDO se résout par séparation de variables et on trouve $x(t) = Ct$. La condition initiale est $x\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, donc $\frac{C}{2} = 1$. La solution au problème de Cauchy est $x(t) = 2t$.

On commence par le cas d'ordre 1.

Théorème d'existence et d'unicité 1.4.8. (Version pour les EDO d'ordre 1) *Soit I, J deux intervalles et soit $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors il existe un intervalle maximal $I' \subseteq I$ ouvert et une unique solution $y\colon I' \to J$ au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'(x) = f\big(x, y(x)\big), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{C}$$

où $(x_0, y_0) \in I \times J$.

L'intervalle est maximal au sens suivant : si $I'' \subseteq I$ est un autre intervalle et $z\colon I'' \to J$ est une autre solution de (C), alors $I'' \subseteq I'$ et $z(x) = y(x)$ pour tout $x \in I''$.

Exemple 1.4.9. Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x}, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

On voit que $y_1(x) = 1$ et $y_2(x) = \sin(\log x)$ sont des solutions. En fait, l'unicité n'est pas vérifiée, puisque $f(x,y) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x}$ n'est pas suffisamment régulière en $y = 1$.

Exemple 1.4.10. Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

En utilisant la séparation de variable, on voit que $y(x) = \frac{1}{1-x}$ est une solution. L'intervalle maximal est $I = (-\infty, 1)$, puisque y n'est pas définie en $x = 1$.

Même si $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur tout son domaine, ce n'est pas suffisant pour déterminer l'intervalle maximal de la solution du problème de Cauchy (C).

Théorème d'existance et d'unicité global 1.4.11. *Soit I un intervalle et $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. S'il existe M tel que pour tout $x \in I$ et pour tout $y, z \in \mathbb{R}$*

$$|f(x,y) - f(x,z)| \leq M|y - z|,$$

alors il existe une unique solution $y\colon I \to \mathbb{R}$ au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f\big(x, y(x)\big), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Exemple 1.4.12. *Arctangente.* Soit $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Alors il existe $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution au problème

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

On appelle cette fonction arctangente et on la note $y(x) = \arctan(x)$. Elle est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Voici un exemple qui illustre la puissance de l'unicité du théorème.

Exemple 1.4.13. *Exponentielle.* On définit $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme la solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Ensuite, quelque soit $a \in \mathbb{R}$, on vérifie aisément que $f(x) = \exp(x+a)$ et $g(x) = \exp(a)\exp(x)$ sont deux solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = \exp(a). \end{cases}$$

Par unicité, on en déduit $\exp(a + x) = \exp(a)\exp(x)$.

On se dirige vers la version générale du théorème. Une EDO d'ordre n peut toujours se ramener à un système à n équations d'ordre 1, donc il est suffisant d'énoncé le théorème pour ce cas. Le système

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, \dots, y_n), \\ \qquad \vdots \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, \dots, y_n), \end{cases}$$

où $f_j \colon U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, peut se réécrire sous la forme concise

$$\vec{y}'(x) = f(x, \vec{y}),$$

où $(x, \vec{y}) \in U$, avec $\vec{y} = (y_1, \dots y_n)$ et

$$f(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, \vec{y}) \\ \vdots \\ f_n(x, \vec{y}) \end{pmatrix}.$$

Donc il suffit de considérer une fonction $f \colon U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ pour déterminer un système d'EDO.

Exemple 1.4.14. Le système d'EDO

$$\begin{cases} y_1'(x) = 2x + 3y_2 \\ y_2'(x) = y_1 - y_3 \\ y_3'(x) = y_1^2 \end{cases}$$

correspond à la fonction $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

$$f(x, y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} 2x + 3y_2 \\ y_1 - y_3 \\ y_1^2 \end{pmatrix}.$$

Si on pose $y = (y_1, y_2, y_3)$, alors on a $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ et on peut utiliser la forme concise $f(x, y) = f(x, y_1, y_2, y_3)$.

Théorème d'existence et d'unicité 1.4.15. (Version général) *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ et soit $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue des variables $(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$. Soit $(x_0, y_0) \in U$ un point dans le domaine de f. Si f est locallement Lipschitz par rapport à la variable y en (x_0, y_0), c'est-à-dire qu'il existe un intervalle J, un ouvert $V \subseteq \mathbb{R}^n$ et une constante $C > 0$ tels que $(x_0, y_0) \in J \times V \subseteq U$ et*

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \leq C\|y - z\|$$

pour tout $(x,y),(x,z) \in J\times V$, alors il existe un intervalle $I \subseteq J$ contenant a et une fonction $y\colon I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que y est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x))\,, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

sur un voisinage de x_0.

Si f est locallement Lipschitz par rapport à y en tout point, alors il existe un unique intervalle I et une unique solution $y\colon I \to \mathbb{R}^n$ au problème de Cauchy. L'intervalle est dit maximal au sens suivante : si I_0 est un autre intervalle contenant a et $\varphi_0\colon I_0 \to \mathbb{R}$ est une autre solution au problème de Cauchy, alors $I_0 \subseteq I$ et $\varphi_0(x) = y(x)$ pour tout $x \in I_0$.

La démonstration utilise des outils d'analyse 3, donc elle dépasse le cadre du cours. Cependant, l'idée est simple et accessible. On se place dans le contexte d'une équation d'ordre 1, c'est-à-dire d'un problème de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} x' = f(t, x(t)), \\ x(a) = x_0 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

On suppose pour le moment que la solution existe. Dans ce cas, en intégrant, on trouve

$$x(t) = \int_a^t f(t, x(t))\mathrm{d}t + x_0. \tag{$*$}$$

Cette équation est très importante : elle permet de déduire que la solution est de classe C^1 et qu'elle vérifie l'inégalité

$$\begin{aligned} |x(t) - x_0| &\leq \int_a^t |f(t, x(t))|\mathrm{d}t \\ &\leq \|f\|(t-a), \end{aligned}$$

où $\|f\|$ serait le supremum de f sur un certain intervalle, par exemple. Ainsi, on ne cherche pas n'importe quelle fonction, on cherche une fonction x qui appartient à l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{g \in C^0(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \mid g(a) = x_0 \text{ et } |g(t) - x_0| \leq 2\varepsilon\|f\|\},$$

où $\varepsilon > 0$ est petit.

L'équation $(*)$ cache quelque chose d'encore plus important. Pour le voir, on pose d'abord

$$F(t) = \int_a^t f(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau + x_0.$$

Définie ainsi, F est la solution du problème de Cauchy, *en supposant que l'on connaît déjà* x. Puisque l'on ne connaît pas x, on regarde au problème d'une différente façon : on s'intéresse plutôt à l'équation

$$F(g)(t) = \int_a^t f(\tau, g(\tau))\mathrm{d}\tau + x_0,$$

où $g \in \mathcal{E}$. L'application $F\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ est bien définie sans devoir connaître x. De plus, si x existe, alors x appartient à $\mathcal{E}$ et doit satisfaire à $(*)$, c'est-à-dire à

$$F(x) = x.$$

On a donc transformé la recherche d'une solution en un problème de point fixe. Cela peut sembler inutile, mais il y a des théorèmes qui permettent d'établir l'existence de points fixes dans certains cas.

La démonstration est très technique. Ce qu'il faut retenir, c'est qu'il n'est pas vain de chercher une solution à une EDO $y' = f(x, y)$ ou $y'' = f(x, y, y')$ sachant que f est de classe C^1. Par contre, le théorème n'indique d'aucune façon *comment trouver les solutions*, c'est la raison pourquoi on a besoin des techniques de résolution.

Maintenant que les idées sont fixées, on peut faire la démonstration. On doit déterminer un moyen d'obtenir l'existence d'un point fixe. On utilisera le théorème suivant.

Théorème du point fixe de Banach 1.4.16. *Soit (X, d) un espace métrique complet. Soit $f\colon X \to X$ une application. Si f est contractante, alors f possède un unique point fixe.*

Remarque. Il y a quelques hypothèses sournoises dans le théorème. D'abord, on dit que $f\colon X \to X$, c'est-à-dire que l'image de f doit être dans X. Ensuite, l'hypothèse de complétude est essentielle. En effet, la fonction $f\colon (0, \frac{1}{2}] \to (0, \frac{1}{2}];\ x \mapsto x^2$ satisfait aux hypothèses, mais $X = (0, \frac{1}{2}]$ n'est pas complet. On voit que le point fixe de f devrait être 0, mais celui-ci n'appartient pas à X.

****

Démonstration. Que f est contractante signifie qu'il existe $0 \le k < 1$ tel que pour tout $x, y \in X$, on a

$$d\big(f(x), f(y)\big) \le kd(x, y).$$

En particulier, f est continue.

On commence par l'unicité. Si x^* et y^* sont des points fixes de f, alors on a

$$d(x^*, y^*) = d\big(f(x^*), f(y^*)\big) \le kd(x^*, y^*)$$

et donc $d(x^*, y^*)(1-k) \le 0$, ce qui est possible seulement si $d(x^*, y^*) = 0$. On conclut que $x^* = y^*$.

On passe à l'existence. Soit x_0 un point de X. On pose $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Puisque f est contractante, la suite vérifie

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &= d\big(f(x_n), f(x_{n-1})\big) \\ &\le kd(x_n, x_{n_1}) \\ &\le k^n d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $m \leq n$, on trouve que

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_{m+1}, x_m) + \cdots + d(x_n, x_{n-1}) \\ &\leq k^m d(x_1, x_0) + \cdots + k^{n-1} d(x_1, x_0) \\ &= d(x_1, x_0) \sum_{j=m}^{n-1} k^j \\ &= d(x_1, x_0) \frac{k^{m+1} - k^n}{1 - k}. \end{aligned}$$

Lorsque n et m sont grands, $\frac{k^{m+1}-k^n}{1-k}$ est petit, donc (x_n) est une suite de Cauchy. Puisque X est complet, il existe x^* tel que $x_n \to x^*$ dans X.

Enfin, pour voir que x^* est un point de f, on a

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f(x^*),$$

car f est continue.

□

La démonstration de la version générale du théorème d'existence et d'unicité est extrêmement technique, donc il est déconseillé de la lire à moins de faire en même temps ou d'avoir suivi analyse 3.

Démonstration du théorème d'existence et d'unicité. Pour la démonstration, on notera la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$ par $\|\cdot\|_2$, c'est-à-dire

$$\|y\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} y_j^2},$$

et la norme sup par $\|\cdot\|_\infty$, à savoir pour $V \subseteq \mathbb{R}^m$ et $g\colon V \to \mathbb{R}^n$ continue

$$\|g\|_\infty = \sup_{z\in V} \|g(z)\|_2.$$

On démontre le cas général d'un système d'équations d'ordre 1. On rappelle que U est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et que $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ est une fonction continue localement Lipschitz en (a, x_0). Le problème de Cauchy d'ordre 1 du système à n équations est

$$\begin{cases} x'(t) = f\big(t, x(t)\big), \\ x(a) = x_0, \end{cases}$$

où x est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

L'hypothèse que f est localement Lipschitz signifie qu'il existe $\delta > 0$ et D tel que pour tout $(t, y), (\tau, z) \in B\big((a, x_0), \delta\big)$, on a

$$\|f(t, y) - f(\tau, z)\|_2 \leq D\|(t, y) - (\tau, z)\|_2. \tag{†}$$

En particulier, si $|t - a| \leq \frac{\delta}{2}$ et si $\|y - x_0\|_2 < \frac{\delta}{2}$, alors on a $(t, y) \in B\big((a, x_0), \delta\big)$. Ensuite, on choisit $\varepsilon > 0$ assez petit pour que

$$i)\ \ \varepsilon < \tfrac{\delta}{2}, \qquad ii)\ \ 2\varepsilon\|f\|_\infty < \tfrac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad iii)\ \ 2D\varepsilon < 1. \tag{‡}$$

Pour le reste de la démonstration, on se restreint à $t \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$.

Comme indiqué plus haut, on cherche un solution dans l'ensemble

$$\mathcal{E} := \{g\colon [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \to \mathbb{R}^n \ ;\ g(a) = x_0,\ g \text{ est continue et } \|g(t) - x_0\|_2 \leq 2\varepsilon\|f\|_\infty\}.$$

On doit munir $\mathcal{E}$ d'une métrique qui en fait un espace complet. On choisit la norme suivante : pour $g \in \mathcal{E}$, on pose

$$\|g\| = \|g\|_\infty.$$

Puisque $(C^0[a-\varepsilon, a+\varepsilon], \|\cdot\|)$ est complet et que $\mathcal{E}$ est fermé dans cet espace, on conclut que $(\mathcal{E}, \|\cdot\|)$ est complet.

On définition l'application $F\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ par

$$F(g)(t) := \int_a^t f(\tau, g(\tau))\mathrm{d}\tau + x_0.$$

On doit montrer que 1. l'image de F est bien contenue dans $\mathcal{E}$ et que 2. F est contractante selon la métrique de $\mathcal{E}$.

On commence par 1. Par le théorème fondamentale du calcul, $F(g)$ est continûment dérivable. De plus, on voit aisément que $F(g)(a) = x_0$. Enfin, on a

$$\begin{aligned}
\|F(g)(t) - x_0\|_2 &\leq \int_a^t \|f(\tau, g(\tau))\|_2 \mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \|f\|_\infty \mathrm{d}\tau \\
&= 2\varepsilon \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

On conclut que $F(g) \in \mathcal{E}$.

Pour le 2, on a

$$\begin{aligned}
\|F(g)(t) - F(h)(t)\|_2 &= \left\| \int_a^t f(\tau, g(\tau))\mathrm{d}\tau - \int_a^t f(\tau, h(\tau))\mathrm{d}\tau \right\|_2 \\
&\leq \int_a^t \|f(\tau, g(\tau)) - f(\tau, h(\tau))\|_2 \,\mathrm{d}\tau \\
&\leq \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \|f(\tau, g(\tau)) - f(\tau, h(\tau))\|_2 \,\mathrm{d}\tau.
\end{aligned}$$

On veut utiliser le fait que f est locallement Lipschitz, en particulier l'équation (†). Pour cela, il faut montrer que $(\tau, g(\tau)), (\tau, h(\tau)) \in B\big((a, x_0), \delta\big)$. Il est clair que $|\tau - a| \leq \varepsilon$, donc par le $i)$ dans l'équation (‡), on a $|\tau - a| \leq \frac{\delta}{2}$. Ensuite, on voit que

$$\|g(\tau) - x_0\|_2 \leq 2\varepsilon \|f\|_\infty < \frac{\delta}{2},$$

par la définition de $\mathcal{E}$ et par $ii)$ dans l'équation (‡). Ceci montre que $(\tau, g(\tau))$ appartient bien à $B\big((a, x_0), \delta\big)$ et de même pour $(\tau, h(\tau))$.

On reprend la dernière inégalité et on applique (†) pour obtenir

$$\begin{aligned}
\|F(g)(t) - F(h)(t)\|_2 &\leq \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \|f(\tau, g(\tau)) - f(\tau, h(\tau))\|_2 \,\mathrm{d}\tau. \\
&\leq \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} D\|(\tau, g(\tau)) - (\tau, h(\tau))\|_2 \,\mathrm{d}\tau && \text{par (†)} \\
&= \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} D\|g(\tau) - h(\tau)\|_2 \,\mathrm{d}\tau
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq D \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \sup_{t\in[a-\varepsilon,a+\varepsilon]} \|g(t)-h(t)\|_2 \,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} D\|g-h\|_\infty \,\mathrm{d}\tau \\
&= 2\varepsilon D\|g-h\|_\infty.
\end{aligned}
$$

On prend la supremum sur les $t \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ pour obtenir

$$\|F(g)-F(h)\|_\infty \leq 2\varepsilon D\|g-h\|_2.$$

Par iii) de l'équation (‡), on voit que F est contractante.

Par le théorème du point fixe de Banach, il existe un unique x^* dans $\mathcal{E}$ tel que $F(x^*) = x^*$. Cette fonction est dérivable par le théorème fondamental du calcul et vérifie

$$(x^*)'(t) = f(t, x^*(t)).$$

Par la définition de $\mathcal{E}$, on a $x^*(a) = x_0$. Ainsi, x^* est l'unique solution au problème de Cauchy initial de $\mathcal{E}$.

Il reste à montrer l'unicité. On suppose maintenant que f est locallement Lipschitz en tout point. Soit S l'ensemble de toutes les solutions au problème de Cauchy. On sait que S est non vide, puisqu'on a montré qu'il existe au moins une solution.

Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in S$ définies respectivement sur I_1 et I_2. L'intersection des intervalles est non vide, puisqu'ils contiennent tous deux a. On pose $J = I_1 \cap I_2$. On montre que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ pour tout $t \in J$. En effet, selon la partie précédente, on doit avoir égalité sur $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. Ensuite, on φ_1 et φ_2 sont tous deux solutions au nouveau problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(a+\varepsilon) = \varphi_1(a+\varepsilon). \end{cases}$$

Ainsi, en répétant l'argument de la partie précédent au point $(a+\varepsilon, \varphi_1(a+\varepsilon))$, on obtient ε_1 tel que φ_1 et φ_2 sont égales sur l'intervalle $[a+\varepsilon-\varepsilon_1, a+\varepsilon+\varepsilon_1]$. En répétant cet argument, on voit que φ_1 et φ_2 s'équivalent sur J.

Ensuite, on pose

$$I = \bigcup_{\varphi\in S} I_\varphi,$$

où I_φ est la domaine de $\varphi \in S$. On définit x sur I par

$$x(t) = \varphi(t) \text{ si } t \in I_\varphi.$$

Cette fonction est bien définie par le paragraphe précédent. C'est une solution au problème de Cauchy, puisque chaque φ en est une. L'intervalle est maximal, puisque $I_\varphi \subseteq I$ pour chaque $\varphi \in S$.

Il reste seulement à montrer que I est ouvert. Cela est clair, puisque si, par exemple, I est fermé à droite, disons $I = (c, d]$, alors il existerait une solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(d) = x(d), \end{cases}$$

mais cela est impossible, car la solution y se prolongerait jusqu'à a et donc le prolongement serait dans S.

□

1.4.3 Équations linéaires du deuxième ordre

On commence avec un peu de terminologie.

Définition 1.4.17. Soit $F(x, y, y', y'') = 0$ une EDO d'ordre deux.

1. Elle est dite *linéaire* si elle s'écrit $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$ où p, q, r sont des fonctions continues.
2. Lorsque p, q sont constantes, alors elle est dite *à coefficients constants*.
3. Pour une EDO linéaire, si on a $r \equiv 0$, alors elle est dite *homogène*. Sinon on dit qu'elle est *inhomogène*.

****

Les idées sont les mêmes que pour l'EDO linéaire d'ordre 1. L'ensemble des solutions

$$\mathcal{S} = \{y\colon [a, b] \to \mathbb{R} \mid y \in C^2[a, b],\ y'' = p(x)y' + q(x)y\}$$

forme un espace vectoriel, mais de dimension 2 cette fois. On cherche donc deux solutions *linéairement indépendantes*.

Définition 1.4.18. Soit $I \in \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f_1, f_2\colon I \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentes de la fonction constante nulle.

1. On dit que f_1 et f_2 sont *linéairement indépendantes* si, lorsque $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sont telles que
$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0$$
pour tout $x \in I$, alors on a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
2. On dit que f_1 et f_2 sont *linéairement dépendantes* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que
$$f_2(x) = \lambda f_1(x)$$
pour tout $x \in I$.

****

Lemme 1.4.19. *On a que f_1 et f_2 sont linéaires indépendantes si et seulement si elles ne sont pas linéaires dépendantes.*

Démonstration. On suppose d'abord que f_1 et f_2 sont linéaires indépendantes. S'il existe λ tel que $f_2 = \lambda f_1$, alors on a

$$\lambda f_1(x) - f_2(x) = 0$$

pour tout x, donc par indépendance linéaire, on doit avoir $\lambda = -1 = 0$, ce qui est impossible. Ainsi f_1 et f_2 ne sont pas linéairement dépendant.

On suppose maintenant que f_1 et f_2 ne sont pas linéairement indépendantes, c'est-à-dire qu'il existe λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0$ et λ_1 ou λ_2 est non nul. Sans perte de généralité, on suppose λ_2 non nul, donc on a

$$\tfrac{\lambda_1}{\lambda_2} f_1(x) + f_2(x) = 0$$

pour tout $x \in I$. Ceci montre que f_1 et f_2 sont linéairement dépendant.

On suppose maintenant que f_1 et f_2 ne soient pas linéairement dépendantes, c'est-à-dire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe x tel que $f_2(x) \neq \lambda f_1(x)$. Supposons qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ telles que $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0$ pour tout x. Si $\lambda_2 \neq 0$, alors on a

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} f_1(x) + f_2(x) = 0,$$

mais par hypothèse, il existe x telle que ceci est faux, donc on doit avoir $\lambda_2 = 0$. Ensuite, on a $\lambda_1 f_1(x) = 0$, donc soit $\lambda_1 = 0$, soit $f_1(x) = 0$ pour tout x, mais par hypothèse, on a que $f_1 \not\equiv 0$, donc $\lambda_1 = 0$. Ceci montre que f_1 et f_2 sont linéairement indépendantes.

$\square$

Remarque Pour les EDO linéaires d'ordre supérieur, il est commun d'introduire un outil qui s'appelle le *Wronskien* pour déterminer l'indépendance linéaire. Pour n fonctions $y_1, \ldots, y_n$, le Wronskien est

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Les fonctions sont alors linéairement indépendantes si et seulement s'il existe x_0 telle que

$$W\Big(y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)\Big) \neq 0.$$

****

Comme pour le cas linéaire d'ordre 1, l'espace des solutions est un espace vectoriel. C'est pourquoi l'indépendance linéaire sera utile.

Lemme 1.4.20. *Soit $p, q \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors l'ensemble*

$$E = \{y \in C^2(a,b) \mid y'' + p(x)y' + q(x)y = 0\}$$

est un espace vectoriel de dimension 2.

Démonstration. 1. Espace vectoriel. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2 \in E$. On veux montrer que $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ est également un élément de E. On a

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y' &= \alpha y_1'' + \beta y_2'' + p(x)(\alpha y_1' + \beta y_2') + q(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) \\ &= \alpha(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + \beta(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où $y \in E$.

2. Dimension au moins 2. On cherche $y_1, y_2 \in E$ linéairement indépendants. Soit $x_0 \in (a,b)$. On pose y_1 et y_2 comme les solutions respective aux problèmes de Cauchy

$$\begin{cases} y_1'' + p(x)y_1' + y_1 = 0, \\ y_1(x_0) = 1, \\ y_1'(x_0) = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_2'' + p(x)y_2' + y_2 = 0, \\ y_2(x_0) = 0, \\ y_2'(x_0) = 1. \end{cases}$$

Si y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $y_2(x) = \lambda y_1(x)$. En particulier, en $x = x_0$, on a $0 = y_2(x_0) = \lambda y_1(x_0) = \lambda$. On voit qu'elles sont donc linéairement indépendantes.

3. Dimension au plus 2. On montre que $\{y_1, y_2\}$ forme une base de E. Soit $z \in E$. On pose $z_0 = z(x_0)$ et $z_0' = z'(x_0)$. Ensuite, on prend

$$u(x) = z_0 y_1(x) + z_0' y_2(x).$$

On voit que

$$\begin{cases} u(x_0) = z_0, \\ u'(x_0) = z_0', \end{cases}$$

donc z et u sont deux solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} w'' + p(x)w' + q(x) = 0 \\ w(x_0) = z_0 \\ w'(x_0) = z_0'. \end{cases}$$

Par unicité, on a $z = z_0 y_1 + z_0' y_2$. On conclut que $\{y_1, y_2\}$ forme un base de E et donc que E est de dimension 2.

□

Lemme 1.4.21. *(Principe de superposition) Soit $p, q, r\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Si E_0 désigne l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ et si y_p est une solution de $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$, alors*

$$\begin{aligned} E &:= \{y \in C^2(a, b) \mid y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)\} \\ &= y_p + E_0. \end{aligned}$$

Démonstration. 1. $E \subseteq y_p + E_0$. Soit $y \in E$. On pose $u = y - y_p$. On a

$$u'' + p(x)u' + u = y'' - y_p'' + p(x)(y' - y_p') + q(x)(y - y_p) = r(x) - r(x) = 0,$$

donc on voit que $u \in E_0$. Il suit que $y = u + y_p \in E$.

2. $y_p + E \subseteq E$. Soit $y \in y_p + E_0$. Alors il existe $y_0 \in E_0$ telle que $y = y_0 + y_p$. On a

$$y'' + p(x)y' + q(x) = r(x),$$

d'où $y \in E$.

□

Méthode pour trouver la solution générale de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$:

1) trouver y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$; la solution homogène est $y_h = C_1y_1 + C_2y_2$;
2) trouver *une* solution particulière y_p de l'équation inhomogène $y''+p(x)y'+q(x)y = r(x)$;
3) la solution générale est donnée par $y = y_h + y_p$.

QComment déterminer si deux solutions sont linéairement indépendantes?

Définition 1.4.22. Soit $y_1, y_2 \in C'[a, b]$. On définit le *Wronskien* de y_1 et y_2 par

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x). \end{aligned}$$

****

Proposition 1.4.23. *Soit $y_1, y_2 \in C^2[a, b]$ deux solutions de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Alors y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes si et seulement si $W(y_1, y_2)(x) \equiv 0$.*

Démonstration. $\Rightarrow$) On suppose que y_1, y_2 sont linéairement dépendantes. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $y_1(x) = \alpha y_2(x)$ et donc $y'(x) = \alpha y_2'(x)$. Ainsi, on voit que

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y_2(x) & y_2(x) \\ \alpha y_2'(x) & y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Il suti que le déterminant de cette matrice est nulle pour tout x.

$\Leftarrow$) On suppose maintenant que $W(y_1, y_2)(x) = 0$ pour tout x. Puisque

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = 0,$$

les colonnes de la matrice sont linéairement dépendantes, donc il existe α_x tel que

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} = \alpha_x \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}.$$

Soit $x_0 \in (a, b)$, $y_0 := y_1(x_0$ et $y_0' := y_1'(x_0)$. On note α_{x_0} par α. On pose $z(x) = \alpha y_2(x)$.

On voit que z et y_1 sont deux solutions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_0'. \end{cases}$$

Par le théorème d'existence et d'unicité, il suit que $z = y_1$, c'est-à-dire que $y_1 = \alpha y_2$, d'où y_1 et y_2 sont linéairement dépendantes.

□

Une formulation équivalente du résultat précédent est que y_1, y_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si il existe x_0 tel que $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$.

Exemple 1.4.24. 1. $y_1(x) = \sin(x+a)$ et $y_2(x) = \sin(b+x)$. On coit que y_1 et y_2 sont solutions de

$$y'' + y = 0.$$

On a

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} \sin(x+a) & \sin(x+b) \\ \cos(x+a) & \cos(x+b) \end{vmatrix} \\
&= \sin(x+a)\cos(x+b) - \sin(x+b)\cos(x+a) \\
&\qquad\qquad (\text{on pose } u = x+a \text{ et } v = x+b) \\
&= \sin u \cos v - \sin v \cos u \\
&= \sin(u-v) = \sin(x+a-x-v) \\
&= \sin(a-b) \equiv 0
\end{aligned}$$

pourvu que $a-b$ est un multiple de π.

Ainsi, par exemple, $\sin(x+3\pi)$ et $\sin(x+\pi$ sont linéairement dépendantes.

Exemple 1.4.25. $y_1(x) = x^\alpha$ et $y_2(x) = x^\beta$, où $x > 0$.

On peut vérifier qu'elles sont solutions de

$$y'' + p\frac{y'}{x} + q\frac{y}{x^2} = 0,$$

où $p = \frac{\alpha(\alpha-1)-\beta(\beta-1)}{\beta-\alpha}$ et $q = -p\alpha - \alpha(\alpha-1)$, pourvu que $\alpha \neq \beta$. (Mais on sait que déjà qu'elles seront linéairement dépendantes dans ce cas.)

On a

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2)(x) &= \begin{vmatrix} x^\alpha & x^\beta \\ \alpha x^{\alpha-1} & \beta x^{\beta-1} \end{vmatrix} \\
&= \beta x^{\alpha+\beta-1} - \alpha x^{\alpha+\beta-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

si et seulement si $\alpha = \beta$.

Ainsi y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes lorsque $\alpha \neq \beta$.

Proposition 1.4.26. *Soit p, q des fonctions continues sur $[a, b]$ et y_1, y_2 des solutions de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Alors il existe D tel que*

$$W(y_1, y_2)(x) = De^{-\int_a^x p(t)\mathrm{d}t}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
W(y_1, y_2)'(x) &= (y_1y_2' - y_1'y_2)' \\
&= y_1'y_2' + y_1y_2'' - (y_1''y_2 + y_1'y_2') \\
&= y_1y_2'' - y_1''y_2 \\
&= y_1(-p9x)y_2' - q(x)y_2) - (-p(x)y_1' - q(x)y - 1)y_2 \\
&= -y_1p(x)y_2' + p(x)y_1'y_2 \\
&= p(x)(-y_1y_2' + y_1y_2) \\
&= -p(x)W(y_1, y_2)(x).
\end{aligned}$$

Ainsi, W satisfait à l'EDO $W' + p(x)W =)$, donc il existe $D \in \mathbb{R}$ tel que

$$W(y_1, y_2) = De^{-\int p}.$$

□

Conséquence : il y a deux possibilité, soit $D = 0$ et $W \equiv 0$ ou soit $D \neq 0$ et $W \neq 0$ pour tout x.

Équations à coefficients constants

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ trois constantes. Une EDO linéaire à coefficients constants prend la forme

$$ay'' + by' + cy = r(x).$$

On peut trouver les solutions de l'équation homogène ($r \equiv 0$) comme suit. On propose une *ansatz* $y = e^{\lambda x}$. Si on remplace dans l'EDO, on obtient

$$a\lambda^2e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0.$$

Les exponentielles se simplifient pour donner l'équation algébrique $p(\lambda) := a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$. On conclut donc que

$$\begin{gathered} y \;=\; e^{\lambda x} \text{ est une solution si et} \\ \text{seulement si } \lambda \text{ est une racine de } p(\lambda). \end{gathered}$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le *discriminent* de $p(\lambda)$. Il y a trois cas possibles.

1^er^ cas : $\Delta > 0$. Le polynôme possède deux racines réelles distinctes données par la formule quadratique

$$\lambda_- = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad \lambda_+ = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Les deux solutions associées $y_+ = e^{\lambda_+ x}$ et $y_- = e^{\lambda_- x}$ sont linéairement indépendantes.

Exercice 1 Montrer que y_+ et y_- sont linéairement indépendantes.

2ᵉ cas : $\Delta < 0$. Le polynôme possède deux racines complexes distinctes. Elles sont conjuguées complexes l'une de l'autre. La formule quadratique donne

$$\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \qquad \text{où } i^2 = -1.$$

On pose $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. Les deux racines sont donc

$$\lambda_- = \alpha - i\beta \qquad \text{et} \qquad \lambda_+ = \alpha + i\beta.$$

Rappelons que la *formule d'Euler* donne

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

On a donc

$$\begin{aligned} e^{\lambda_+ x} &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}\Big(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x)\Big). \end{aligned}$$

Les deux solutions sont alors

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x) \qquad \text{et} \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Exercice 2 Vérifier que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Remarque. On pourrait aussi regarder à $e^{\lambda_- x}$, mais on ne ferait qu'obtenir deux solutions linéairement dépendantes aux deux premières trouvées.

****

3ᵉ cas : $\Delta = 0$. Il n'y a qu'une racine double. Elle est donnée par

$$\lambda = \frac{-b}{2a}.$$

On a donc une première solution $y_1 = e^{\lambda x}$.

Pour trouver la deuxième solution, on utilise la méthode de la variation de la constante. On cherche une solution $y_2(x) = u(x)e^{\lambda x} = u(x)y_1(x)$. On dérive

$$\begin{aligned} y_2'(x) &= u'y_1 + uy_1' \\ y_2''(x) &= u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''. \end{aligned}$$

On remplace dans l'EDO

$$\begin{aligned} ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0 & \\ &= a\big(u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1''\big) + b\big(u'y_1 + uy_1'\big) + cuy_1 \\ &= u\underbrace{\big(ay_1'' + by_1' + cy_1\big)}_{=0} + u'\big(2ay_1' + by_1\big) + u''ay_1 = 0 \\ &= u'\big(2a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x}\big) + u''ae^{\lambda x} = 0 \\ &= u'\underbrace{\big(2a\lambda + b\big)}_{=0} + u''a = 0 && \text{car } \lambda = \tfrac{-b}{2a} \\ &= u''a = 0. \end{aligned}$$

On conclut que $u'' = 0$, donc la solution est $u(x) = c_1 x + c_2$. Prenons $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$.
La deuxième solution est donc $y_2(x) = xe^{\lambda x}$.

Exercice 3 Vérifier que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Exemple 1.4.27. Soit l'EDO linéaire d'ordre 2

$$y'' + 16y = 0.$$

Le polynôme associé est $p(\lambda) = \lambda^2 + 16$. Le discriminant du polynôme est $\Delta = -64$. Ainsi, le polynôme à deux racines complexes conjuguées. Les racines sont $\lambda_\lambda = \pm 4i$. Les solutions générales sont donc

$$y_1(x) = C\cos(4x),$$
$$y_2(x) = D\sin(4x).$$

Exemple 1.4.28. Soit l'EDO linéaire homogène

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Le polynôme associé est $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$. Son discriminant est $\Delta = 1+8 = 9$. Le polynôme a donc deux racines réelles données par $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_1 = -1$. Les solutions générales sont donc

$$y_1 = Ce^{2x},$$
$$y_2 = De^{-x}.$$

Exemple 1.4.29. Soit l'EDO

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = 2^2 - 4 = 0$. Le polynôme $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$ possède la racine double $\lambda = -1$. Ainsi, les deux solutions générales sont

$$y_1(x) = Ce^{-x},$$
$$y_2(x) = Dxe^{-x}.$$

Équation inhomogène

On veut maintenant résoudre $ay'' + by' + cy = r(x)$. Pour trouver la solution, il reste à trouver une solution particulière y_p. La solution générale sera alors $y = y_p + y_h$, où y_h est la solution générale de l'équation homogène, à savoir $y_h = y_1 + y_2$.

Méthode des coefficients indéterminés

L'idée est de prendre y_p comme ayant la même forme que $r(x)$.

Type de $r(x)$	**Choix de** y_p	**À déterminer**
$ae^{\alpha x}$	$Ce^{\alpha x}$	C
$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots$	$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$	$a_j \ (j = 1, \ldots, n)$
$\alpha\cos(wx) + \beta\sin(wx)$	$a\cos(wx) + b\sin(wx)$	a, b
$e^{\alpha x}\big(\beta\cos(wx) + \gamma\sin(wx)\big)$	$e^{\alpha x}\big(a\cos(wx) + b\sin(wx)\big)$	a, b

Cette méthode est bien pratique si r figure dans le tableau, mais sinon il faudra utiliser une autre méthode.

Exemple 1.4.30. $y'' + 4y = 4e^{2x}$.

1. Solution homogène : le polynôme est $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$. Ses racines sont $\lambda = \pm 2i$. Les solutions de l'équation homogène sont $y_1 = C_1\cos(2x)$ et $y_2 = C_2\sin(2x)$.
2. Solution particulière : par la méthode des coefficients indéterminés, on pose comme *ansatz* $y_p = Ce^{2x}$. On cherche à déterminer C. On a
$$y_p'' + 4y_p = 4Ce^{2x} + 4Ce^{2x} = 8Ce^{2x} = 4e^{2x}.$$
On a donc $C = \frac{1}{2}$.
3. Solution générale : $y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + \frac{1}{2}e^{2x}$.

Remarque. Il faut faire attention que la solution particulière soit bien linéairement indépendante des solutions de l'équation homogène. Si la solution particulière n'est pas linéaire indépendante, on peut la multiplier par x pour éliminer la dépendance linéaire. S'il y a encore dépendance linéaire, on multiplie par x, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait indépendance linéaire.

****

Exemple 1.4.31. $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$.

1. Solution homogène : le polynôme associé est $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)$. Les zéros sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$. Les solutions sont donc $y_1 = C_1e^{2x}$ et $y_2 = C_2e^{-x}$.
2. Solution particulière : selon la méthode, on chercherait $y_p = Ce^{2x}$, mais cette fonction est linéaire dépendante avec y_1. On prend plutôt $y_p = Cxe^{2x}$, qui est linéaire indépendante. On a
$$y_p' = Ce^{2x} + 2Cxe^{2x}$$
$$y_p'' = 4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x}.$$
On obtient
$$y_p'' - y_p' - 2y_p = 4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x} - Ce^{2x} - 2Cxe^{2x} - 2Cxe^{2x} = 3Ce^{2x} = 3e^{2x}.$$
On a donc $C = 1$. La solution particulière est $y_p = xe^{2x}$.
3. Solution générale : $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + xe^{2x}$.

Méthode de Lagrange

Voici une méthode plus générale que la méthode des coefficients indéterminés, mais plus calculatoire, pour trouver une solution particulière de $ay'' + by' + cy = r(x)$.

Remarque. Cette méthode fonction même si l'EDO n'est pas à coefficients constants (mais tout de même linéaire), mais il faut d'abord avoir trouvé les solutions de l'équation homogène.

****

Soit

$$y'' + ay' + by = r(x) \tag{E}$$

l'EDO. On suppose que le coefficient de y'' est 1, car sinon on peut diviser l'équation par son coefficient (qui est non nul, sinon l'EDO serait d'ordre 1). On cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x),$$

où y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène.

On dérive y_p

$$y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'$$

$$y_p'' = u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + 2u_2'y_2' + u_2y_2''.$$

On remplace dans (E)

$$\begin{aligned} &u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2''y_2 + 2u_2'y_2' + u_2y_2'' \\ &\qquad + a\big(u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'\big) \\ &\qquad\qquad + b\big(u_1y_1 + u_2y_2\big). \\ &= u_1\big(\underbrace{y_1'' + ay_1' + by_1}_{=0}\big) + u_2\big(\underbrace{y_2'' + ay_2' + by_2}_{=0}\big) \\ &\qquad + u_1''y_1 + 2u_1'y_1' + u_2''y_2 + 2u_2'y_2' \\ &\qquad\qquad + a\big(u_1'y_1 + u_2'y_2\big) = r(x). \end{aligned} \tag{$*$}$$

Comme on a une équation, mais deux inconnues (u_1 et u_2), on ajoute une condition pour simplifier la dernière équation. On impose donc

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0. \tag{C_1}$$

On dérive l'équation (C_1)

$$u_1''y_1 + u_1'y_1' + u_2''y_2 + u_2'y_2' = 0.$$

L'équation $(*)$ se simplifie donc en

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = r(x). \tag{C_2}$$

Le problème s'est réduit à trouver u_1 et u_2 qui satisfont aux conditions (C_1) et (C_2). Ceci se réécrit par

$$\begin{array}{l} (C_1) \\ \\ (C_2) \end{array} \begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \\ \\ u_1' y_1' + u_2' y_1' = r(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix}.$$

C'est donc un système linéaire de la forme $A\vec{X} = \vec{b}$. Si A est inversible, alors la solution est donnée par $\vec{X} = A^{-1}\vec{b}$. Puisque y_1 et y_2 sont linéairement indépendant, la matrice A est inversible. En effet, supposons le contraire. Alors son déterminant est nul, donc

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = 0 \Rightarrow \frac{y_2'}{y_2} = \frac{y_1'}{y_1}.$$

En intégrant, on trouve

$$\log |y_2| = \log |y_1| + C \Rightarrow y_2 = k y_1,$$

ce qui contredit l'hypothèse que y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes.

Finalement, on trouve

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ r(x) \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$u_1' = \frac{-y_2(x) r(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}$$

$$u_2' = \frac{y_1(x) r(x)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'}.$$

On intègre pour trouver u_1 et u_2. La solution particulière est alors $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$.

Exemple 1.4.32. $y'' - 2y' + y = 3e^x$. On a $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$, donc les solutions de l'équation homogène sont $y_1 = e^x$ et $y_2 = xe^x$.

Pour la solution particulière, on pose $y_p = u_1 e^x + u_2 x e^x$. D'abord, on a

$$\left| \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix} \right| = (x+1)e^{2x} - xe^{2x} = e^{2x}.$$

On a

$$u_1' = \frac{-xe^x \cdot 3e^x}{e^{2x}} = -3x,$$

donc on trouve $u_1 = -\frac{3}{2}x^2$. Ensuite, on a

$$u_2' = \frac{e^x \cdot 3e^x}{e^{2x}} = 3,$$

donc on trouve $u_2 = 3x$.

La solution particulière est $y_p = -\frac{3}{2}x^2 e^x + 3x x e^x = \frac{3}{2}x^2 e^x$.

Ceci conclut la section sur les équations du deuxième ordre. Les équations linéaires à coefficients non constants pourraient être étudiées, mais pour soucis de temps, elles sont omises. Les autres types d'équations d'ordre deux dépassent le contenu du cours.

1.5. Méthode d'Euler

Que faire s'il n'y a aucune technique qui permet de résoudre une EDO? On peut tourner vers les méthodes numériques pour approximer une solution. On commence par présenter une méthode rudimentaire, motivée par la géométrie : la méthode d'Euler.

On considère l'EDO un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

où f est supposée de classe C^1. On ne connaît pas la solution y, mais on connaît y'. On sait que la tangente à la courbe est la meilleure approximation par droite de y. C'est là que se trouve toute l'idée de la méthode.

Soit x_1 un point près de x_0. Le but est d'approximer $y(x_1)$. On sait que la solution passe par (x_0, y_0). On peut donc trouver la droite

$$T_0(x) = mx + b$$

tangente à y. C'est simple, la pente m est donnée par la dérivée, donc $m = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Ensuite, on sait que T_0 passe par (x_0, y_0), donc on a

$$y_0 = mx_0 + b, \quad \text{c'est-à-dire} \quad b = y_0 - mx_0.$$

L'approximation sera

$$y_1 = T_0(x_1),$$

Ainsi, le segment de droit entre (x_0, y_0) et (x_1, y_1) est une approximation de la solution sur l'intervalle $[x_0, x_1]$.

À partir de l'approximation (x_1, y_1), on peut approximer un point plus loin, disons $y(x_2)$. On répète simplement le processus ci-haut : on définit la droite

$$T_1(x) = f(x_1, y_1)x + b_1, \qquad \text{où } b_1 = y_1 - f(x_1, y_1)x_1,$$

et on pose $y_2 = T_1(x_2)$.

Voici l'algorithme complet.

Méthode d'Euler.
Soit l'intervalle $[a, b]$. Soit le problème de Cauchy
$y'(x) = f\big(x, y(x)\big)$, $y(a) = y_0$.
1. **Poser** $x_0 = a$. **Choisir** un nombre d'itération n. **Poser** $h = \frac{1}{n}$.
2. Pour $0 \leq j \leq n$, **faire**
   poser $m_j = f(x_j, y_j)$
   $b_j = y_j - f(x_j, y_j)x_j$
   $x_{j+1} = x_j + h$
   $y_{j+1} = f(x_j, y_j)x_{j+1} + b_j$.
3. **Renvoyer** $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$.

Chapitre 2

Systèmes d'équations différentielles ordinaires

2.1. Systèmes linéaires

2.1.1 Définitions et exemples

Un système d'EDO linéaire à coefficients constants a la forme

$$(*) \qquad \begin{cases} y_1'(x) = a_{11}y_1(x) + a_{12}y_2(x) + \cdots + a_{1n}y_n(x) + p_1(x) \\ \quad \vdots \\ y_n'(x) = a_{n1}y_1(x) + a_{n2}y_2(x) + \cdots + a_{nn}y_n(x) + p_n(x) \end{cases}$$

avec $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ et $p_j\colon I \to \mathbb{R}$. Ici, x est une variable réelle indépendante et $y_1, \ldots, y_n$ sont des variables dépendantes.

Le système $(*)$ est un peu lourd à écrire. Ainsi, afin de simplifier, on pose

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(n \times n),$$

$$P(x) = \begin{pmatrix} p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Le système $(*)$ prend la forme simple

$$Y'(x) = AY(x) + P(x).$$

C'est la forme générale d'un système d'EDO. Il n'est pas nécessaire de supposer que A soit constante. En effet, A peut dépendre de x, ce qui veut dire que chaque coefficient de la matrice A sera une fonction de x.

Définition 2.1.1. Un *système d'EDO linéaire à n équations* est un système de la forme

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + P(x),$$

où $Y, P\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ et $A(x) \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ pour tout $x \in I$.

1. Le système est à *coefficients constants* si A ne dépend pas de x (donc $A(x) = A$ pour tout $x \in I$).
2. Le système est *homogène*ăsi $P(x) = \vec{0}$ pour tout $x \in I$.
3. Le système est *inhomogène* s'il n'est pas homogène.

****

Remarque. Un système homogène et à coefficients constants fait partie des systèmes dits *autonomes*. On étudiera ces systèmes plus tard.

****

Exemple 2.1.2. 1. Le système suivant se transforme en système matricielle :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

On voit que l'on peut résoudre ce système par séparation de variables. La première équation donne $y_1 = C_1 y_1$ et la deuxième donne $y_2 = C_2 e^{2x}$. Ainsi, la solution générale est

$$Y = \begin{pmatrix} C_1 e^x \\ C_2 e^{2x} \end{pmatrix}.$$

2. Le système suivant se transforme en système matricielle :

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = -y_2 \end{cases} \longleftrightarrow Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} Y.$$

On peut résoudre la première équation :

$$y_1' = y_1 \Rightarrow y_1 = C_1 e^x.$$

Cependant, on ne sait pas encore résoudre pour les deux autres variables dépendantes y_2 et y_3. (On verra plus tard que $y_2 = C_2 \sin x + C_3 \cos x$ et $y_3 = C_2 \cos x - C_3 \sin x$.)

L'exemple 1 montre qu'il est simple de résoudre le système si la matrice est diagonale. L'exemple 2 montre qu'on ne sait pas encore comment résoudre le système sinon.

Exemple 2.1.3. *Diagonalisation.* Soit le système

$$Y' = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}}_{A} Y = AY.$$

On diagonalise la matrice, si possible, pour résoudre le système.
1. Valeurs propres : On a

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 6 & 5-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -10 - 3\lambda + \lambda^2 + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

On a deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$, donc A est diagonalisable.

2. Vecteurs propres : Pour $\lambda_1 = 1$, on a

$$A - I = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\overset{L_2 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc l'équation $-3x - 2y = 0$, donc on peut choisir $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre.

Pour $\lambda_2 = 2$, on a

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\overset{L_2 \leftarrow \frac{2}{3} L_2 + L_1}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a l'équation $-4x - 2y = 0$, donc on peut prendre le vecteur propre $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

La matrice de passage est $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ et elle satisfait $D = P^{-1}AP$, où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Résoudre le système : on voit que

$$\begin{aligned} Y' = AY \quad &\Rightarrow \quad P^{-1}Y' = P^{-1}AY = P^{-1}APP^{-1}Y \\ &\Rightarrow \quad Z' = DZ, \quad \text{où } Z = P^{-1}Y. \end{aligned}$$

On sait que $Z = \begin{pmatrix} C_1 e^x \\ C_2 e^{2x} \end{pmatrix}$ est la solution générale, puisque D est diagonale. Ainsi, on trouve

$$Y = PZ = \begin{pmatrix} 2C_1 e^x + C_2 e^{2x} \\ -3C_1 e^x - 2C_2 e^{2x} \end{pmatrix} = C_1 e^x \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + C_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On voit que la solution est en fait de la forme

$$Y = C_1 e^x v_1 + C_2 e^{2x} v_2,$$

donc il n'est même pas nécessaire de calculer le produit PZ, il suffit de connaître les vecteurs propres.

De façon générale, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A et si si $v_1, \dots, v_n$ sont une base de vecteurs propres de A, alors $P = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ est une matrice de passage qui diagonalise A. On sait que $e^{\lambda_j x} e_j$ est une solution de $Z' = DZ$, où $Y = PZ$ et D est diagonale avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sur sa diagonale. Puisque $Pe_j = v_j$, on a que

$$Y = PZ = e^{\lambda_1 x} v_1 + \cdots + e^{\lambda_n x} v_n.$$

Voici donc la démarche pour trouver la solution générale lorsque A est à coefficients constants.

Démarche. Soit le système d'EDO $Y' = AY$, où $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ est à coefficients constants. Si A est diagonalisable, alors on peut résoudre le système en suivant ces étapes.

1. Trouver les valeurs propres de A.
2. Trouver une base de vecteurs propres $\{v_1, \dots, v_n\}$ associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
3. La solution est
$$Y = e^{\lambda_1 x} v_1 + \cdots + e^{\lambda_n x} v_n.$$

On ne sait pas toujours pas calculer la solution générale lorsque A n'est pas diagonalisable. On y viendra plus tard. On s'attarde maintenant à la théorie générale de base des systèmes d'équations linéaires.

2.1.2 Propriétés des systèmes linéaires

Théorème 2.1.4. *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $A\colon I \to \mathrm{Mat}(n \times n)$ et $P\colon I \to \mathbb{R}^n$ deux applications. Si A et P sont continues, alors pour tout $x \in I$ et $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Y' = A(x)Y + P(x), \\ Y(x_0) = Y_0, \end{cases}$$

possède une unique solution $Y\colon I^\circ \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1.

Note : Ici I° désigne l'intervalle I sans ses bornes. Par exemple, si $I = [a, b)$, alors $I^\circ = (a, b)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème d'exitence et d'unicité. Pour voir que le domaine de Y est I°, il faut utiliser le théorème d'existence global. (Il n'a pas été énoncé pour les systèmes, mais il fonctionne aussi dans ce cas. On n'en discutera pas davantage, puisque c'est trop avancé pour le cours.)

□

Remarques. 1. Dans un cours d'analyse, on montre que $A = (a_{ij})$ est continue sur I si et seulement si a_{ij} est continue sur I pour chaque $1 \leq i, j \leq n$. Par exemple, la fonction

$$A(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sqrt{x} \\ \frac{1}{x-1} & 0 \end{pmatrix}$$

est continue sur $(0, 1) \cup (1, \infty)$.

2. Si A est à coefficients constants (c'est-à-dire que $A(x) = A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ pour tout $x \in I$), les solutions de l'équation homogène $Y' = AY$ sont définis sur $\mathbb{R}$.

****

Pour s'assurer de trouver toutes les solutions possibles, il faudra encore vérifier l'indépendance linéaire des solutions.

Définition 2.1.5. 1. Soit $f_1, \ldots, f_n \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des fonctions. On dit qu'elles sont *linéairement indépendantes* si pour tout $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, si on a

$$\lambda_1 f_1(x) + \cdots + \lambda_n f_n(x) = 0 \qquad \text{pour tout } x \in I,$$

alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

2. On dit que $f_1, \ldots, f_n$ sont *linéairement dépendantes* si elles ne sont pas linéairement indépendantes.

****

Lemme 2.1.6. *Soit $Y' = A(x)Y$ un système d'EDO d'ordre 1, où $A \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times n)$. Si A est continue, alors*

$$E_0 = \{f \colon I^\circ \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ est de classe } C^1 \text{ et } f'(x) = Af(x)\}$$

forme une espace vecotiel de dimension n.

Démonstration (esquisse)**.** C'est la même idée que dans le cas d'EDO d'ordre 2. On définit $f_j = \begin{pmatrix} f_{1j} \\ \vdots \\ f_{nj} \end{pmatrix}$ la solution au problème de Cauchy

$$\begin{cases} f_j'(x) = A(x)f(x) \\ f_{1j}(x_0) = 0 \\ \quad \vdots \\ f_{jj}(x_0) = 1 \\ \quad \vdots \\ f_{nj}(0) = 0. \end{cases}$$

Ensuite, il suffit de montrer que les f_j sont linéairement indépendantes et qu'elles forment un base de E_0.

□

L'outils pour déterminer l'indépendance linéaire est encore le wronskien.

Définition 2.1.7. Soit $Y_1, \ldots Y_n \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ des fonctions. On définit leur *wronskien* par

$$W(Y_1, \ldots, Y_n)(x) = \det\Big(Y_1(x), \ldots, Y_n(x)\Big),$$

où $(Y_1(x), \ldots, Y_n(x)\Big)$ est la matrice dont la j^e colonne est $Y_j(x)$.

****

Lemme 2.1.8. *Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ des solutions de l'EDO $Y' = A(x)Y$, où $A \colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times n)$ est continue. Elles sont linéairement indépendantes si et seulement si pour tout $x \in I$, on a $W(Y_1, \ldots, Y_n)(x) = 0$.*

*Démonstration***.** C'est la même idée que pour les EDO linéaires d'ordre 2.

□

Remarque. Le lemme se réécrit

$Y_1, \dots, Y_n$ son linéairement indépendantes $\Leftrightarrow$ il existe $x \in I$ tel que $W(Y_1, \dots, Y_n)(x) \neq 0$.

En fait, on peut montrer un résultat plus fort.

****

Théorème 2.1.9. *Si $Y_1, \dots, Y_n$ sont n solutions de $Y' = A(x)Y$, où $A\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times n)$, alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que*

$$W(Y_1, \dots, Y_n)(x) = C \exp\left(\int_{x_0}^x \operatorname{tr}\big(A(s)\big)\mathrm{d}s\right).$$

Démonstration (esquisse). On pose $\Phi = \Big(Y_1, \dots, Y_n\Big)$. On notera la i^e ligne de Φ par Φ_i. On dérive le déterminant. On utilise une formule qui se démontrep par récurrence. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \det\big(\Phi(x)\big) = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_i' \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix}.$$

En utilisant le fait que $Y_1, \dots Y_n$ sont des solutions de l'EDO, on arrive à montrer que

$$\det \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_i' \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ a_{ii}\Phi_i \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} = a_{ii} \det\big(\Phi(x)\big),$$

où $a_i i$ est le coefficient de $A := (a_{ij})$.

Ainsi, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \det\big(\Phi(x)\big) = \sum_{i=1}^n a_{ii} \det\big(\Phi(x)\big) = \operatorname{tr}\big(A(x)\big) \det\big(\Phi(x)\big).$$

La solution de cette EDO est $\det\big(\Phi(x)\big) = C \exp\left(\int_{x_0}^x \operatorname{tr}\big(A(s)\big)\mathrm{d}s\right)$.

□

Exemple 2.1.10. 1. L'EDO $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} Y$ possède les solutions $Y_1 = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$. On vérifie qu'elles sont linéairement indépendantes :

$$\begin{aligned} W(Y_1, Y_2)(x) &= \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x \\ &= 1. \end{aligned}$$

Le wronskien est non nul, donc lesdeux solutions sont linéairement indépendantes. La solution générale est

$$Y = C_1Y_1 + C_2Y_2, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. L'EDO $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$ possède les solutions $Y_1 = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y_2 = \begin{pmatrix} xe^x \\ e^x \end{pmatrix}$. Le wronskien est

$$\begin{aligned} W(Y_1, Y_2)(x) &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x} \neq 0. \end{aligned}$$

Il suit que Y_1 et Y_2 sont linéairement indépendantes. La solution générale de l'EDO est donc $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$.

On termine la section avec un autre résultat familier des EDO d'ordre 1 et 2.

Lemme 2.1.11. Principe de superposition *Soit* $A\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}(n \times n)$ *et* $P\colon I \to \mathbb{R}^n$ *continues. Soit* Y_p *une solution particulière de l'EDO* $Y' = A(x)Y + P(x)$ *et* $Y_1, \ldots, Y_n$ *des solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène* $Y' = A(x)Y$*. Alors la solution générale de l'EDO inhomogène est*

$$Y = C_1Y_1 + \cdots + C_nY_n + Y_p.$$

Démonstration. On vérifie aisément que si Z_1 et Z_2 sont deux solutions de l'équation inhomogène, alors $Z := Z_1 - Z_2$ est solution de l'équation homogène. Le reste est exactement comme dans le cas des EDO d'ordre 1 ou 2.

□

2.2. Systèmes linéaires à coefficients constants

2.2.1 Norme matricielle

L'ensemble des matrices $\mathrm{Mat}(n \times m)$ forme un espace vectoriel, car on peut addition deux telles matrices et on peut les multiplier par un scalaire. Il sera donc utile de munir cet espace d'une norme.

Définition 2.2.1. Soit $\mathrm{Mat}(n \times n)$ l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients réels, qui agissent sur $\mathbb{R}^n$.

1. Pour tout $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit la *norme de* $\vec{x}$ par

$$\|\vec{x}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Pour toute matrice $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$, on définit la *norme matricielle de* A par

$$\|A\| = \max_{\|\vec{x}\|=1} \|A\vec{x}\|.$$

****

Remarques. 1. On notera un vecteur avec ou sans flèche (x ou $\vec{x}$).

2. On utilise le symbole $\|\cdot\|$ à la fois pour la norme d'un vecteur et pour la norme d'une matrice. Le contexte devrait rendre clair à tout moment quelle norme est utilisée.

****

La norme de $\vec{x}$ est la longueur du segment de droite entre le point $\vec{0}$ et $\vec{x}$. C'est la norme euclidienne usuelle.

La norme de la matrice A représente le plaus grand coefficient de dilatation A. L'exemple suivant illustre ce que l'on entend.

Exemple 2.2.2. *Coefficient de dilatation.* Soit $A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2)$ une matrice ayant deux valeurs propres réelles distinctes λ_1, λ_2. Dans ce cas, chaque cercle centré à l'origine est envoyé par A sur une ellipse dont les demi-axes sont déterminés par les valeurs propres.

Image du cercle envoyé sur l'ellipse

On peut calculer directement que $\|A\| = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$, ce qui est le plus grand coefficient de dilatation de A.

Le choix de cette norme matricielle se justifie par les propriétés suivantes.

Proposition 2.2.3. *Soit $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors la norme matricielle satisfait à*

1. *(séparation) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$;*
2. *(inégalité triangulaire) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;*
3. *(homogénéité) $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$;*
4. *(sous-multiplicativité) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.*

Les points 1 à 3 font de $\|\cdot\|$ une norme. On peut ainsi interpréter la norme matricielle de A comme la *longueur* de A. La quantité $\|A - B\|$ représente la *distance* entre les matrices A et B. Le point 4 en fait une norme *matricielle*. En effet, ce qui distingue l'espace vectoriel des matrices d'un autre espace vectoriel est la produit matricielle.

Démonstration. 1. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Puisque $\|e_j\| = 1$, on a que $\|Ae_j\| \leq \|A\| = 0$, donc $\|Ae_j\| = 0$. Puisque $\|\cdot\|$ est une norme sur les vecteurs, on doit avoir $Ae_j = \vec{0}$. Si $Ae_j = \vec{0}$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, alors il suit que $A = 0$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$. Puisque $\|\cdot\|$ est une norme sur les vecteurs, on a

$$\|(A + B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\|.$$

En prenant le maximum sur les x tels que $\|x\| = 1$ des deux côtés de l'inégalité, on obtient $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|x\| = 1$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $\|\cdot\|$ est une norme sur les vecteurs, on a $\|A(\lambda x)\| = \|(\lambda A)x\| = |\lambda|\|Ax\|$. Ainsi, en prenant le maximum sur les x tels que $\|x\| = 1$, on obtient $\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On a que

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1.$$

Ainsi, il suit que

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \max_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\|.$$

Ainsi, on voit que $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$. Si $x = \vec{0}$, alors il est clair que l'inégalité est encore vraie. Il s'ensuit que

$$\|ABx\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|.$$

En prenant le maximum sur les x tel que $\|x\| = 1$ des deux côtés, on obtient $\|AB\| = \|A\|\|B\|$ comme voulu.

$\square$

À l'aide de la norme, on peut définir la notion de limite.

Définition 2.2.4. Soit (A_n) une suite de matrices de $\mathrm{Mat}(n \times n)$. On dit que (A_n) *converge vers* $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ si

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Dans ce cas, on écrit $\lim_{n\to\infty} A_n = A$.

$****$

Comme il est difficile de calculer $\|A\|$, on utilise le critère suivant, qui est équivalent.

Proposition 2.2.5. *Soit (A_n) une suite de matrice de $\mathrm{Mat}(n \times n)$, où $A_n = \left(a_{ij}^{(n)}\right)$ et $A = \left(a_{ij}\right)$. Alors on a que $A_n \to A$ lorsque $n \to \infty$ si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij} \quad \textit{pour tout } 1 \leq i, j \leq n \qquad (\textit{dans } \mathbb{R}).$$

Démonstration. Soit E_{ij} la matrice qui vaut 1 dans la position de la i^e ligne et la j^e colonne et 0 ailleurs. On a

$$\|A\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \|E_{ij}\| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a^* \|E_{ij}\| = F a^*, \tag{$*$}$$

où $a^* := \max\{a_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ et $F := \sum_i \sum_j \|E_{ij}\|$. On pose $\|A\|_\infty = a^*$. C'est une norme sur $\mathrm{Mat}(n \times n)$ et l'inégalité $(*)$ montre que $\|\cdot\|$ est une fonction continue lorsque $\mathrm{Mat}(n \times n)$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Puisque $\mathcal{B} = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n) : \|A\|_\infty = 1\}$ est fermé et borné, c'est un compact. Puisque $\|\cdot\|$ est continue, elle atteint son minimum et son maximum sur $\mathcal{B}$, disons en B et en C respectivement. Ainsi, on a

$$\|B\| \leq \left\| \frac{A}{\|A\|_\infty} \right\| \leq \|C\|.$$

Ainsi, on a $C_1\|A\|_\infty \leq \|A\| \leq C_2\|A\|_\infty$, où C_1 et C_2 sont des constantes. Ceci montre que la norme matricielle et la norme $\|A\|_\infty$ sont (Lipschitz) équivalentes. En particulier, il suit que $\|A_n - A\| \to 0$ si et seulement si $\|A - A_n\|_\infty \to \infty$.

Enfin, on a que $\|A_n - A\|_\infty \to 0$ si et seulement si $a_{ij}^{(n)} \to a_{ij}$ dans $\mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$. En effet, d'une part, pour tout i, j, on a $|a_{ij}^{(n)} - a_{ij}| \leq \|A_n - A\|$. D'autre part, s'il existe i, j tels que $a_{ij}^{(n)} \not\longrightarrow a_{ij}$, alors il existe une sous-suite $\left(a_{ij}^{(n_k)}\right)$, un $\varepsilon > 0$ et un $K \in \mathbb{N}$ tels que $|a_{ij}^{(n_k)} - a_{ij}| \geq \varepsilon$ pour tout $k \geq K$. Il suit que $\|A_{n_k} - A\| \geq \varepsilon$.

$\square$

Exemple 2.2.6. La suite de matrices $A_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & \frac{\sin n}{n} \\ \frac{n}{n+1} & \sqrt[n]{n} \end{pmatrix}$ converge vers $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, car

$$\frac{1}{n} \to 0, \quad \frac{\sin n}{n} \to 0, \quad \frac{n}{n+1} \to 1, \quad \sqrt[n]{n} \to 1.$$

Puisque la somme de matrices et la limite sont bien définies, on peut définir la notion de série de matrices.

Définition 2.2.7. 1. Soit (A_n) une suite de $\mathrm{Mat}(n \times n)$. On appelle une *somme partielle* de (A_n) le terme

$$s_k = A_1 + A_2 + \cdots + A_k.$$

La suite (s_k) est la *suite des sommes partielles de A_n*.

2. On dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ *converge* si la limite des sommes partielles converge et on écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} A_n.$$

3. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|$ converge (dans $\mathbb{R}$), on dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ est *absolument convergente*.

****

Théorème 2.2.8. *Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ est absolument convergente, alors est convergente.*

Démonstration. Cela est vrai puisque $(\mathrm{Mat}(n \times n), \|\cdot\|)$ est complet. □

Exemple 2.2.9. Soit $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ une matrice telle que $\|A\| < 1$. Soit $s_k = I + A + A^2 + \cdots + A^k$ la suite des sommes partielles. On a

$$s_k - As_k = I - A^{k+1} \quad \Rightarrow \quad s_l(I - A) = I - A^{n+1}.$$

On a que $A^{n+1} \to \vec{0}$, car $\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \to 0$ (dans $\mathbb{R}$), donc il suit que la suite (s_k) converge et vaut

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = (I - A)^{-1}.$$

C'est une généralisation des séries géométriques.

Si, dans l'exemple précédent, on remplace A par $I - A$, alors cette formule donne une façon de calculer l'inverse de A, pourvu que $\|I - A\| < 1$.

On termine la section sur la remarque suivante. Il y a plusieurs norme possible sur $\mathrm{Mat}(n \times n)$, alors perd-on en généralité en choisissant la norme matricielle définie au début de la section? Le théorème suivant permet de conclure que non.

Théorème 2.2.10. *Toutes les normes sur* $\mathrm{Mat}(n \times n)$ *sont (Lipschitz) équivalentes à la norme matricielle.*

L'avantage de la norme matricielle est la propriété de sous-multiplicativité, propriété qui n'est pas respectée par toutes les normes.

2.2.2 Exponentielle matricielle

Pour une EDO $y' = p(x)y$, on sait que la solution est simplement $y = Ce^{\int p}$. On souhaite généraliser ce résultat. En effet, si $Y_1, \ldots, Y_n$ sont les solutions de $Y' = AY$, alors on peut construire la matrice $B = \big(Y_1, \cdots, Y_n\big)$. Cette matrice vérifie alors l'équation différentielle

$$B' = AB.$$

C'est une équation *matricielle* et la solution est une matrice.

Définition 2.2.11. Soit $A \in \mathrm{Mat}(n \times n)$. L'*expentielle de A* est

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

L'*exponentielle matricielle* est l'application $\exp\colon \mathrm{Mat}(n \times n) \to \mathrm{Mat}(n \times n)$ qui envoie A sur e^A.

****

Pour que cette définition soit correct, il faut vérifier que e^A est une série convergente. On montre un peu plus. Pour tout matrice A et pour tout $x \in \mathbb{R}$, il est clair que

$$\|e^{Ax}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n A^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x^n| \|A\|^n}{n!} = e^{|x| \|A\|}.$$

Ainsi, la série $\sum_n \frac{x^n A^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout matrice A et tout réel x.