Analyse 3

Série 7 (partielle) (solutionnaire partiel)

Fonctions implicites

Exercice 1. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Si f est dérivable sur U, alors f' définit une fonction de $U \to M_{m\times n}$. Montrer que f est de classe C^1 si et seulement si f' est continue.

Solution. Si f' est continue, alors on a vu en classe que les entrées de la matrice jacobienne sont les dérivées partielles et comme la matrice est continue, chaque entrée est continue.

Si les dérivées partielles existent et sont continues, alors la matrice jacobienne existe et est continue. Puisque f' est exactement la matrice jacobienne (après un choix de base), on conclut que f' est continue.

Exercice 2. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Montrer que si les $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ existent et sont bornées dans un voisinage de $x \in U$, alors f est continue en x.

Suggestion. Inspirez-vous de la démonstration du théorème qui montre qu'une matrice jacobienne continue implique que f est de classe C^1.

Solution. On peut supposer que $m = 1$, quitte à appliquer le résultat à chaque composante de f.

Soit $h = (h_1, \ldots, h_n)$ petit. Soit $z_0 := x \in U$. On pose $z_j := a + (h_1, \ldots, h_j, 0, \ldots, 0)$. Autrement dit, on a $z_j = z_{j-1} + h_j e_j$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \sum_{j=1}^{n} \big(f(z_j) - f(z_{j-1})\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \big(f(z_{j-1} + e_j h_j) - f(z_{j-1})\big) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi_j) h_j, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le théorème des accroissements finis et donc $\xi_j \in [z_{j-1}, z_j]$ est inconnu. Puisque chaque dérivée partielle est bornée dans un voisinage de x, lorsque $h \to 0$, on voit que $f(x+h) - f(x) \to 0$, d'où f est continue en x.

Exercice 3. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$. Montrer que si $f'(x)$ est inversible, alors l'inverse local est de classe C^k.

Solution. On commence par montré que $\mathrm{Inv}\colon M_n^{-1} \to M_n^{-1}$; $X \mapsto X^{-1}$ est de classe C^∞. Dans la série 6, on a montré que Inv est dérivable et que $\mathrm{Inv}'(A)H = -A^{-1}HA^{-1}$. Les dérivées partielles de Inv sont données par $\frac{\partial \,\mathrm{Inv}}{\partial x_{ij}}(A) = -A^{-1}e_{ij}A^{-1}$, où e_{ij} est la matrice dont tous les éléments sont nuls, sauf l'entrée ij qui vaut 1. Puisque Inv et le produit de matrices sont continues, on voit que $\frac{\partial \,\mathrm{Inv}}{\partial x_{ij}}$ est continue pour chaque ij. Ainsi, Inv est de classe C^1. Il s'ensuit que $\frac{\partial \,\mathrm{Inv}}{\partial x_{ij}}$ est de classe C^1 et donc Inv est de classe C^2. Cet argument itératif se pousuit à l'infini et on conclut que Inv est de classe C^∞.

Ensuite, par hypothèse, on sait que $f'(y) \in M_n^{-1}$ pour tout y dans un voisinage U_x de x. Ainsi, la composée $\mathrm{Inv} \circ f'\colon U_x \to M_n^{-1}$ est bien définie. Il en découle que $\mathrm{Inv} \circ f'$ est de classe C^{k-1}.

Enfin, on a

$$(f^{-1})'(y) = \Big(f'\big(f^{-1}(y)\big)\Big)^{-1} = \mathrm{Inv} \circ f' \circ f^{-1}(y).$$

Tous les éléments de la composée sont de classe C^1, donc $(f^{-1})'$ est de class C^1. Ainsi, il suit que f^{-1} est de classe C^2. En appliquant se résonnement à répétition, on conclut que $(f^{-1})'$ est de classe C^k.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) := 0$.

a) Montrer que $f'(0) = 1$ et que f' est borné dans $(-1, 1)$.

b) Montrer que f n'est pas localement injective en 0.

c) Cela contredit-il le théorème d'inversion locale?

Exercice 5. Pour chacune des fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivantes, déterminer

i) en quels points de $\mathbb{R}^2$ elle est localement inversible;

ii) si elle possède un inverse global sur $\mathbb{R}^2$.

a) $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)^T$.

b) $f(x,y) = (x^3 + x, 3x^3 + y^3 + ay)^T$, $a \in \mathbb{R}$.
Suggestion. Montrez et utilisez le fait que $\varphi_a(z) = z^3 + az$ est une bijection de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si et seulement si $a \geq 0$.

Exercice 6. On pose $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$. Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$

a) En quels points de U la fonction f est-elle localement inversible?

b) Soit $b := f(3/2, 0)$. Calculer $(f^{-1})'(b)$.

c) Calculer $V := f(U)$.

d) La fonction possède-t-elle un inverse global de V sur U?

Exercice 7. Coordonnées sphériques. Pour $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$\begin{aligned} x &:= r\cos\theta\sin\varphi, \\ y &:= r\sin\theta\sin\varphi, \\ z &:= r\cos\varphi. \end{aligned}$$

Au voisinage de quels points $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ est-il possible d'exprimer r, θ, φ comme des fonctions continues de x, y, z?

Solution. On pose

$$f(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\varphi, \\ r\sin\theta\sin\varphi, \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

La matrice jacobienne est

$$f'(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est

$$\begin{aligned} \det f'(r,\theta,\varphi) &= \cos\varphi(-r^2\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - r^2\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi) \\ &\qquad - r\sin\varphi(r\cos^2\theta\sin^2\varphi + r\sin^2\theta\sin^2\varphi) \\ &= -r^2\cos^2\varphi\sin\varphi - r^2\sin^3\varphi \\ &= -r^2\sin\varphi. \end{aligned}$$

Ainsi, si $r \neq 0$ et $\varphi \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, alors par le théorème d'inversion local, il est possible d'exprimer (r, θ, φ) en terme de (x, y, z). Les points où le théorème ne s'applique pas sont donc ceux de l'ensemble $E = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Soit $(0, 0, z_0) \in E$. On suppose que f est localement inversible sur un voisinage de $(0, 0, z_0)$. Ainsi, il existe un voisinage ouvert U de $(0, 0, z_0)$ et trois fonctions continues $r, \theta, \varphi \colon U \to \mathbb{R}$ qui s'expriment en terme de x, y, z. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{B}\big((0, 0, z_0), \varepsilon\big) \subseteq U$. On a les relations

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \\ \tan\theta &= \frac{y}{x}, \\ r\cos\varphi &= z. \end{aligned}$$

On utilise les trois équations comme suit. D'abord, le long de la courbe $\alpha(t) := (\varepsilon\cos t, \varepsilon\sin t, z_0)$, on voit que $r\big(\alpha(t)\big)^2 = r\big(\alpha(0)\big)^2 = \varepsilon^2 + z_0^2$. En particulier, on obtient que $r(-\varepsilon, 0, z_0) = r(\varepsilon, 0, z_0)$, puisque $r \circ \alpha$ est continue.

Ensuite, le long de la courbe $\beta(t) := (t, 0, z_0)$, on a $\tan\theta\big(\beta(t)\big) = 0$, donc $\theta\big(\beta(t)\big) \in \pi\mathbb{Z}$ pour tout $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Puisque $\theta \circ \beta$ est continue, on doit avoir qu'elle est constante. On conclut que $\theta(-\varepsilon, 0, z_0) = \theta(\varepsilon, 0, z_0)$.

Enfin, le long de la courbe $\gamma(t) := (\varepsilon \cos t, \varepsilon \sin t, z_0)$, on a $r\big(\gamma(t)\big) \cos\varphi\big(\gamma(t)\big) = z_0$. Puisque $r \circ \gamma$ est constante, on a que $\cos\varphi \circ \gamma$ est constante. De plus, $\varphi \circ \gamma$ est continue, donc on conclut qu'elle est constante. On a donc $\varphi(-\varepsilon, 0, z_0) = \varphi(\varepsilon, 0, z_0)$.

En combinant les trois paragraphes précédents, on obtient que $(-\varepsilon, 0, z_0) = (\varepsilon, 0, z_0)$, ce qui est impossible.

Exercice 8. Soit p le polynôme $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont considérés comme des paramètres variables. On sait que si toutes les racines de p sont réelles, alors $p(x) = (x-r)(x-s)(x-t)$ pour certains $r, s, t \in \mathbb{R}$.

a) On suppose qu'en a_0, b_0, c_0, le polynôme p n'admet que des racines réelles, disons r_0, s_0, t_0. Donner une condition suffisante sur r_0, s_0, t_0 pour que les racines de p dans un voisinage de (a_0, b_0, c_0) soit des fonctions dérivables de a, b, c.

b) On suppose que $b, c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables telles que $b(0) = -7$, $c(0) = 6$, $b'(0) = 5$ et $c'(0) = -15$. Quelle racine du polynôme $p(x) = x^3 + b(u)x + c(u)$ est la plus stable en $u = 0$? (c'est-à-dire dont la norme de la dérivée est la plus petite)

Exercice 9. Soit $F \colon M_2 \to M_2$ définie par $F(X) = X^2$. Trouver une condition suffisante sur X pour que F soit inversible au voisinage de X.

Solution. On a calculé en classe que $F'(X)$ est l'application linéaire $F'(X)H = XH + HX$, où $H \in M_2$. On choisit la base suivante de M_2 :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans cette base, $F'(X)$ s'exprime comme une matrice 4×4. Comme X est quelconque, on écrit $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Pour trouver $F'(X)$, on calcule $F'(X)e_j$. On trouve

$$F'(X) = \begin{pmatrix} 2x_1 & x_3 & x_2 & 0 \\ x_2 & x_1 + x_4 & 0 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 + x_4 & x_3 \\ 0 & x_3 & x_3 & 2x_4 \end{pmatrix}$$

Elle sera inversible si le déterminant est non nul. Pour simplifier les calcules du déterminants, on soustrait la dernière ligne de la première ligne et on soustrait la dernière colonne de la première. On trouve

$$\det F'(X) = \begin{vmatrix} 2x_1 & x_3 & x_2 & 0 \\ 0 & x_1 + x_4 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_1 + x_4 & x_3 \\ -2x_1 - 2x_4 & 0 & 0 & 2x_4 \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= -x_3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & x_2 \\ 0 & x_1+x_4 & x_3 \\ -2x_1-2x_4 & 0 & 2x_4 \end{vmatrix} + (x_1+x_4) \begin{vmatrix} 2x_1 & x_2 & 0 \\ 0 & x_1+x_4 & x_3 \\ -2x_1-2x_4 & 0 & 2x_4 \end{vmatrix} \\
&= -x_3x_2(2x_1+2x_4)(x_1+x_4) + (x_1+x_4)\Big(2x_1 2x_4(x_1+x_4) - x_2x_3(2x_1+2x_4)\Big) \\
&= 2(x_1+x_4)^2\big(-x_2x_3 + 2x_1x_4 - x_2x_3\big) \\
&= 4(x_1+x_4)^2(x_1x_4 - x_2x_3) \\
&= (\operatorname{tr} X)^2 \det X.
\end{aligned}
$$

Ainsi, il est suffisant que $x_1 \neq x_4$ et que X soit inversible.

Exercice 10. Soit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ouverts, $f\colon U \to V$ un homéomorphisme et $a \in U$. On pose $b = f(a)$ et $g = f^{-1}$ et on suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) \in M_n^{-1}$.

a) Pour k dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, on pose $h(k) = g(b+k) - g(b)$. Montrer qu'il existe des constantes $\delta > 0$ et $C > 0$ telles que si $\|k\| < \delta$, alors $\|h(k)\| \leq C\|k\|$.

b) Déduire que g est dérivable en b et que $g'(b) = f'(a)^{-1}$.

Exercice 11. Théorème d'inversion local, version dérivable. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Si $f'(x)$ existe et est inversible pour tout x, alors f est un homéomorphisme local. Montrer ce théorème dans le cas $n = 1$.
Suggestion. Utilisez le théorème de Rolle.

Remarque. La version générale du théorème utilise le théorème de point fixe de Brouwer, qui dépasse le cours d'analyse 3.

Solution. Soit $x \in U$. Si f n'est pas injective, alors il existe $x \neq y$ dans U tels que $f(x) = f(y)$. Par le théorème de Rolle, il existe ξ entre x et y tel que $f'(\xi) = 0$, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, f est injective.

Soit $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U$. On pose $V_x = f\big(B(x, r)\big)$. Il suit que $f\colon B(x, r) \to V_x$ est inversible. On pose $g := f^{-1}$, l'inverse de f sur $B(x, r)$. Il reste à montrer que g est continue.

Quitte à travailler avec $-f$, on suppose que f est strictement croissante. On montre d'abord que g est strictement croissante. Supposons le contraire, alors il existe $u, v \in V_x$ tels que $u < v$ et $g(u) \geq g(v)$. Si on applique f à la deuxième inégalité, on obtient $u \geq v$, ce qui est une contradiction.

Soit $y_0 \in V_x$ et $\varepsilon > 0$. On pose $x_0 = g(y_0)$ et $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, r\}$. Ensuite, on pose $y_\pm = f(x_0 \pm \varepsilon')$ et $\delta = \min\{y_0 - y_-, y_+ - y_0\}$. Pour tout y tel que $|y - y_0| < \delta$, on a

$$
\begin{aligned}
y_0 - \delta < y < y_0 + \delta \quad &\Rightarrow \quad y_- < y < y_+ \\
&\Rightarrow \quad g(y_-) < g(y) < g(y_+) \\
&\Rightarrow \quad x_0 - \varepsilon' < g(y) < x_0 + \varepsilon'
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad |g(y) - x_0| < \varepsilon' \leq \varepsilon \\ &\Rightarrow \quad |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Il suit que g est continue en y_0.

Remarque. Dans le cas $n = 1$, on montre plus que l'énoncé. En effet, on voit que f est injective et même strictement monotone. Si on restreint le codomaine à son image, alors f devient inversible sur tout son domaine et son inverse est continue.

Exercice 12. On considère dans $\mathbb{R}^2$ la courbe C d'équation $xe^y + ye^x = 0$, où $x, y \in \mathbb{R}^2$.

a) Montrer qu'il existe un voisinage U de l'origine et une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\big(x, f(x)\big) \in C$ pour tout $x \in U$.

b) Quelle est l'équation de la tangente à C en $(0, 0)$?

c) Montrer qu'il existe un unique point C où la tangente est horizontale et calculer son abscisse.

Solution. On pose $g(x, y) = xe^y + ye^x$. Cette fonction est classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

a) D'une part, on a $g(0, 0) = 0$. D'autre part, on a $g'(x, y) = (e^y + ye^x,\ xe^y + e^x)$ et donc $g'(0, 0) = (1, 1)$. Ainsi, par le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage U de 0, V de 0 et une fonction $f\colon U \to V$ de classe C^1 telle que $g\big(x, f(x)\big) = 0$ pour tout $x \in U$.

b) Comme $y = f(x)$, la pente de la tangente est $f'(0)$. On sait que $f'(x) = -\frac{\partial g}{\partial y}^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}$, donc on a $f'(0) = -1$. L'équation de la tangente est $y = -x$.

c) La pente de la tangente est toujours donnée par $y' = -\frac{\partial g}{\partial y}^{-1} \frac{\partial g}{\partial x}$ là où $\frac{\partial g}{\partial y}$ est inversible. Ainsi, on a

$$y' = -\frac{e^y + ye^x}{xe^y + e^x}.$$

La pente est nulle lorsque $e^y + ye^x = 0$. On doit également satisfaire à $g(x, y) = 0$, donc on a $ye^x = -xe^y$. En substituant, on trouve $e^y - xe^y = e^y(1 - x) = 0$. Ainsi, le seul point est en $x = 1$ et donc $e^y + ey = 0$. Il reste à montrer que $h(y) = e^y + ey$ possède un unique zéro.

D'une part, on a $h'(y) = e^y + e > 0$, donc h est injective et possède au plus un zéro. Ensuite, il est clair que $h(y) \to -\infty$ lorsque $y \to -\infty$ et que $h(y) \to \infty$ lorsque $y \to \infty$, donc h possède un zéro par le théorème des valeurs intermédiaires. Si on veut un intervalle un peu plus précis, on a que $h(-1) = e^{-1} - e < 1 - 2 = -1 < 0$ et $h(0) = 1 > 0$, donc le zéro se trouve dans l'intervalle $(-1, 0)$.

Exercice 13. On considère la surface $S \subseteq (0, \infty)^3$ définie par $2x^2z + \log(xyz) + 7 = y^3$.

a) Montrer qu'il existe un unique point de la forme $(1, 2, z_0)$ et calculer z_0.

b) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de $(1, 2)$ et une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que pour tout $(x, y) \in U$ et tout $z > 0$, on a $(x, y, z) \in S$ si et seulement si $z = f(x, y)$.

c) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

Exercice 14. On suppose que $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0)$ est une solution du système

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z^2 + u^3 + u + v^2 &= -1, \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w &= 10, \\ x + 3z^2 + w + u^2 &= 0. \end{aligned}$$

a) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert de (x_0, y_0, z_0) et des fonctions dérivables u, v, w de (x, y, z) définies sur ce voisinage qui résolvent ce système.

b) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert de (u_0, v_0, w_0) et des fonctions dérivables x, y, z de (u, v, w) définies sur ce voisinage qui résolvent ce système.

c) Calculer $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}(x_0, y_0, z_0)$ dans le cas particulier $(x_0, y_0, z_0) = (0, 4, 1)$.

Exercice 15. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la courbe C définie comme étant l'intersection des surfaces $z = x^2 + y$ et $z^2 = y^2 + x$. Montrer qu'il existe exactement un point de C au voisinage duquel il n'est pas possible d'obtenir une représentation paramétrique continue de C de la forme $(x(z), y(z), z)$. Calculer les coordonnées de ce point.

Solution. On pose

$$g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y - z \\ x + y^2 - z^2 \end{pmatrix}.$$

La courbe C est exactement l'ensemble $g^{-1}(0, 0)$. On commence par calculer la dérivée de g. On a

$$g'(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & -1 \\ 1 & 2y & -2z \end{pmatrix}.$$

Pour appliquer le théorème des fonctions implicites, on veut montrer que $\frac{\partial g}{\partial(x,y)}$ est inversible. Ainsi, on calcule son déterminant :

$$\det \frac{\partial g}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{vmatrix} = 4xy - 1.$$

Il est non nul si et seulement si $4xy \neq 1$. En particulier, il est non nul si $x = 0$ ou si $y = 0$. Pour chacun de ces points, il existe un voisinage dans lequel on peut exprimer C sous la forme $\big(x(z), y(z), z\big)$.

Soit maintenant (x, y, z) tel que $4xy = 1$. Comme on veut $g(x, y, z) = (0, 0)$, on obtient trois équations et trois inconnues. On remplace $z = x^2 + y$ dans le deuxième équation de g pour obtenir

$$x + y^2 - (x^2 + y)^2 = x + y^2 - (x^4 + 2x^2y + y^2) = x - x^4 - 2x^2y = x - x^4 - \tfrac{x}{x} = x(\tfrac{1}{2} - x^3).$$

On pose $\alpha = 2^{\frac{-1}{3}}$. On a donc $x(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)$. Le polynôme de degré deux possède un discriminant strictement négatif, donc aucune racine réelle. Puisque x est non nul, il y a seulement $x=\alpha$ à considérer.

Lorsque $x=\alpha$, on a $y = \frac{1}{4\alpha} = 2^{-2}2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{-5}{3}} = \frac{1}{2}\alpha^2$ et $z = \alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{3}{2}\alpha^2$. Pour montrer que x ou y ne s'exprime pas en fonction de z dans un voisinage de $P := (\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2, \frac{3}{2}\alpha^2)$, on montre que la fonction $z = \varphi(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}$ n'est pas inversible. On obtient cette fonction en isolant y dans la première composante de g et en la substituant dans la seconde.

D'abord, on a $\varphi'(x) = -\frac{1}{x^2} + x = \frac{2x^3-1}{2x^2}$. On voit que $\varphi'(\alpha) = 0$. Ensuite, on a $\varphi''(x) = \frac{1}{x^3} + 1$ et donc $\varphi''(\alpha) = 3 > 0$, d'où φ a un minimum en $x = \alpha$. Ainsi, dans un voisinage de P, si $z < \varphi(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha^2$, alors le système d'équations définissant C n'a aucune solution. Ainsi, aucune représentation paramétrique continue de C en fonction de z n'existe dans ce voisinage.

Exercice 16. Pour chacune des fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes, trouver les points $(x_0, y_0) \in C := \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$ pour lesquels il n'est pas possible de trouver $r > 0$ et $g\colon B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que $g(x_0) = y_0$ et $\big(x, g(x)\big) \in C$ pour tout $x \in B(x_0, r)$.

a) $f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3x^2 + 3y^2$

b) $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$

Exercice 17. Démontrer le théorème d'inversion locale en utilisant le théorème des fonctions implicites.

Exercice 18. Soit $W_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ et $W_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ des ouverts. Soit $f\colon W_1 \times W_2 \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1 des variables $(x,y) \in W_1 \times W_2$. Pour $a \in W_1$, on pose $E(a) := \{b \in W_2 \mid f(a,b) = 0\}$.

a) Soit $a_0 \in W_1$ un point, U un voisinage ouvert de a_0 et K un compact de W_2 tels que
$$|E(a_0)| \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \bigcup_{a \in U} E(a) \subseteq K \subseteq W_2.$$
Montrer que si $\frac{\partial f}{\partial y}(a_0, b)$ est inversible pour tout $b \in E(a_0)$, alors $|E(a)| = |E(a_0)|$ pour tout a dans un voisinage ouvert de a_0.

b) Montrer que pour $W_1 = W_2 = \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y^2 - xy^3 + y - x$ et $a_0 = 0$, la conclusion du a) est fausse. Quelles sont les hypothèses du a) qui ne sont pas satisfaites?

Remarque. La partie a) montre que sous certaines hypothèses, le nombre de solutions $y(x)$ satisfaisant $f\big(x, y(x)\big) = 0$ au voisinage de $x = a_0$ est constant.

Exercice 19. Méthode de l'homotopie. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $H\colon [0,1] \times U \to \mathbb{R}^n$ une fonction* de classe C^1 des variable $(t,x) \in [0,1] \times U$. On pose $F_0(x) := H(0,x)$ et

* Comme $[0,1] \times U$ n'est pas nécessairement ouvert, on dit que H est de classe C^1 sur $[0,1] \times U$ si H est définie et de

$F(x) = H(1, x)$. On suppose que

- il existe $x_0 \in U$ tel que $F_0(x_0) = 0$;
- $\frac{\partial H}{\partial x}$ est inversible pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times U$;
- il existe $d > 0$ pour tout $(t, x) \in [0, 1] \times U$, on a

$$\left\| \tfrac{\partial H}{\partial x}(t, x)^{-1} \tfrac{\partial H}{\partial t}(t, x) \right\| < d.$$

Montrer qu'il existe $g \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $H\big(t, g(t)\big) = 0$.

Remarque. Cet exercice est un outil qui aide à trouver numériquement des solutions à des équations non linéaires. Elle est souvent accompagnée d'une autre méthode, comme la méthode de Newton ou de Runge-Kutta. La fonction H s'appelle une homotopie. Si on pose $\mathcal{H} = \{H(t, \cdot) \mid t \in [0, 1]\}$, alors $\mathcal{H}$ est une famille de fonctions et H détermine une « courbe continue » entre F_0 et F dans $\mathcal{H}$.

Solution. On a $H(0, x_0) = F_0(x_0) = 0$ par hypothèse. Puisque $\frac{\partial H}{\partial x}(0, x_0)$ est inversible, par le théorème des fonctions implicites, il existe U_0 un voisinage de 0, V_0 un voisinage de x_0 et $g \colon U_0 \to V_0$ de classe C^1 tels que $x_0 = g(0)$ et $H\big(t, g(t)\big) = 0$.

Puisque U_0 est ouvert, il contient un intervalle $I = [0, t_0)$. On pose

$$t^* = \sup\{t_0 \mid \exists g \colon [0, t_0) \to U \text{ de classe } C^1 \text{ t.q. } g(0) = x_0,\ H\big(t, g(t)\big) = 0\ \forall t \in [0, t_0)\}.$$

On montre que $t^* \geq 1$. On suppose le contraire. Si g est telle que dans la description du supremum de t^*, alors en dérivant, on trouve

$$\|g'(t)\| = \left\| \frac{\partial H}{\partial x}(t, x)^{-1} \frac{\partial H}{\partial t}(t, x) \right\| < d,$$

car $0 \leq t \leq t^* < 1$. Ainsi, par le théorème de la moyenne, g est d-Lipschitz, donc uniformément continue.

Puisque le g du théorème des fonctions implicites est unique, il doit exister un g défini sur $[0, t^*)$. Par continuité uniforme, la limite suivante existe

$$\lim_{t \to t^*} g(t) = x^*.$$

Ainsi, si on applique le théorème des fonctions implicites en (t^*, x^*), on trouve une fonction g^* qui prolonge g sur $[0, t^* + \varepsilon)$, pour un $\varepsilon > 0$, ce qui contredit la définition de t^*. On doit donc avoir $t^* \geq 1$.

Exercice 20. Homotopie globale. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $F \colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. Soit $x_0 \in U$. On pose $H(t, x) = F(x) - (1 - t)F(x_0)$. On suppose que $\|I - F'(x)\| < 1$ pour tout $x \in U$. Montrer que H vérifie les hypothèses de la méthode de l'homotopie.

---

classe C^1 sur un ouvert V qui contient $[0, 1] \times U$. Ce détail est plus technique qu'important pour l'exercice.

Exercice 21. Homotopie convexe. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $F_0, F\colon U \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1. On pose $H(t,x) = (1-t)F_0(x) + tF(x)$, où $t \in [0,1]$. On suppose que :

- il existe $x_0 \in U$ tel que $F_0(x_0) = 0$;
- on a $\|I - F_0'(x)\| \le k < 1$ et $\|I - F'(x)\| \le k < 1$;
- il existe $M \ge 0$ tel que $\|F(x) - F_0(x)\| \le M$ sur U.

Montrer que H vérifie les hypothèses de la méthode de l'homotopie.

Solution. On commence par montrer que $\frac{\partial H}{\partial x}$ est inversible. On a bien sûr $\frac{\partial H}{\partial x}(t,x) = (1-t)F_0'(x) + tF'(x)$. On a donc

$$\begin{aligned}\big\|I - \tfrac{\partial H}{\partial x}(t,x)\big\| &= \big\|It + (1-t)I - (1-t)F_0'(x) + tF'(x)\big\| \\ &= \big\|t\big(I + F'(x)\big) + (1-t)\big(I - F_0'(x)\big)\big\| \\ &\le t\big\|\big(I + F'(x)\big)\big\| + (1-t)\big\|\big(I - F_0'(x)\big)\big\| \\ &\le tk + (1-t)k < 1.\end{aligned}$$

On a montré dans la série 6 que si $\|A\| < 1$, alors $I - A$ est inversible, d'où $\frac{\partial H}{\partial x}(t,x)$ est inversible. De plus, il en découle que

$$\big\|\tfrac{\partial H}{\partial x}^{-1}\big\| \le \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\big(I - \tfrac{\partial H}{\partial x}\big)^n\right\| \le \sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k}.$$

Ensuite, on a $\frac{\partial H}{\partial t} = F(x) - F_0(x)$. Il s'ensuit que

$$\|\frac{\partial H}{\partial x}^{-1}\frac{\partial H}{\partial t}\| \le \|\frac{\partial H}{\partial x}^{-1}\|\|\frac{\partial H}{\partial t}\| \le \frac{1}{1-k}\|F(x) - F_0(x)\| \le \frac{M}{1-k}.$$

Ainsi, ce H satisfait à toutes les hypothèses de la méthode d'homotopie.

Exercice 22. Soit l'équation $\frac{1}{e} + \left(\frac{e-2}{4}\right)(x - x\log(1+x)) = 0$.

a) Montrer qu'il existe une solution dans l'intervalle $I := \big(-\frac{2}{e}, 0\big)$. (On tient pour acquis que $e > 2$.)

b) On définit $F\colon I \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{e} + \left(\frac{e-2}{4}\right)(x - x\log(1+x))$ et $F_0(x) = \frac{1}{e} + x$. Trouver une homotopie $H\colon [0,1] \times I \to \mathbb{R}$ telle que $H(0,x) = F_0(x)$, $H(1,x) = F(x)$ et H est de classe C^1.

c) Montrer que ce H vérifie les hypothèses de la méthode de l'homotopie.

d) Soit $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction donner par la méthode. Trouver une équation différentielle et une condition initiale que g vérifie et adéquates pour utiliser la méthode de Runga-Kutta.

Exercice 23. Soit $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. En utilisant le théorème de Peano*, montrer que si $f(t_0, x_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0)$ est inversible,

* Si $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ est continue, alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = h(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$ possède au moins une solution.

alors il existe $g\colon I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $g(t_0) = x_0$ et $f\big(t, g(t)\big) = 0$.

Solution. On considère le probème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = -\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)^{-1}\frac{\partial f}{\partial t}(t,x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Puisque f est de classe C^1 et que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est inversible sur un voisinage de (t_0, x_0), il existe au moins une solution à ce problème. Ainsi, il existe I un intervalle ouvert contenant t_0 et $g\colon I \to U$ de classe C^1 tels que g est une solution au problème de Cauchy. Puisque l'on a

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t}\big(t, g(t)\big) + \frac{\partial f}{\partial x}\big(t, g(t)\big)g'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f\big(t, g(t)\big),$$

on voit que $f\big(t, g(t)\big) = C$, une constante. Or, on sait que $g(t_0) = x_0$ et que $f(t_0, x_0) = 0$, d'où $f\big(t, g(t)\big) = 0$.

Exercice 24. Trouver dans $\mathbb{R}^3$ le minimum et le maximum de la fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x^2 + 2y^2 = z^2 + 1$.

Exercice 25. Calculer la distance entre l'origine et la courbe

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - xy + y^2 - z^2 = x^2 + y^2 = 4\}.$$

Solution. On considère la fonction $f(x,y,z) = \|(x,y,z)\|^2$. Elle est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^3$. Si on trouve un minimum de f relatif à C, alors il suffira de prendre la racine carrée pour trouver la distance entre l'origine et C.

Puisque le point $(2,0,0) \in C$, il suit que $C \cap \overline{B}(0,2)$ est non vide et compact, donc f atteint son minimum sur cet ensemble et celui-ci est majoré par 2. De plus, si $p \in C \setminus B(0,2)$, alors nécessairement $f(p) \geq 2$, donc le minimum de f relatif à C est atteint.

D'abord, on note que C se simplifie. En effet, si on remplace $x^2 + y^2 = 4$ dans l'équation $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 4$, on trouve $xy + z^2 = 0$. Ainsi, on pose

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy + z^2 \\ x^2 + y^2 - 4 \end{pmatrix}.$$

On a

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} y & x & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}.$$

Les minorants sont

$$\begin{vmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2y^2 - 2x^2, \qquad \begin{vmatrix} y & 2z \\ 2x & 0 \end{vmatrix} = -4xz, \qquad \begin{vmatrix} x & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix} = 4yz.$$

Ainsi, g n'est pas de rang 2 si et seulement si les trois déterminants sont nuls en même temps. Dans ce cas, la première équation donne $x = y$ ou $x = -y$. Ainsi, on trouve les points $(0,0,z)$ ou bien $z=0$ et $x=\pm\sqrt{2}$, $y=\pm\sqrt{2}$. Aucun de ces points ne vérifient $g(x,y,z)=0$, donc g est de rang 2 sur C.

On applique la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Il existe $(\lambda,\mu)\mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} f'(x,y,z)-(\lambda,\mu)g'(x,y,z)=0, \\ g(x,y,z)=0, \end{cases}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} 2x-\lambda y-2\mu x=0 \\ 2y-\lambda x-2\mu y=0 \\ 2z-2\lambda z=0 \\ xy+z^2=0 \\ x^2+y^2=4. \end{cases}$$

On multiplie l'équation 1 par x et l'équation 2 par y et on soustrait la deuxième de la première pour obtenir

$$2x^2-2y^2-2\mu(x^2-y^2)=2(x^2-y^2)(1-2\mu)=0.$$

On multiplie ensuite l'équation 1 par y et l'équation 2 par x et on soustrait la deuxième de la première :

$$-\lambda y^2+\lambda x^2=0.$$

On trouve donc $\lambda=0$ ou $x^2-y^2=0$. La troisième équation donne $z=0$ ou $2\lambda=1$.

Si $x^2-y^2=0$, alors on doit avoir $x=\pm\sqrt{2}$ et $y=\pm\sqrt{2}$. Dans ce cas, l'équation 4 donne que $2+z^2=0$, ce qui impossible. Ainsi, on doit avoir $\lambda=0$ et donc $z=0$. Si $z=0$, alors ou bien $x=0$ et $y=\pm 2$ ou bien $y=0$ et $x=\pm 2$.

On a donc trouvé les candidats $(2,0,0)$, $(-2,0,0)$, $(0,2,0)$ et $(0,-2,0)$. Ils donnent tous $f(2,0,0)=4$. La distance minimale est donc $\sqrt{4}=2$.

Exercice 26. Soit $a,b,c>0$. Quelle est la valeur maximale du produit xy^2z^3 sur le triangle défini par $ax+by+cz=1$ et $x,y,z\geq 0$?

Exercice 27. On pose $U=\left\{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{4}<t-s<2\right\}$ et on considère les courbes

$$C(s,t)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 2y-z^2=s \text{ et } x^2+2y-z=t\}, \qquad \text{pour } (s,t)\in U.$$

a) Montrer que $C(s,t)\neq\emptyset$.

Solution. Si $(x,y,z)\in C(s,t)$, alors on trouve $2y=s+z^2$ et $t-s=x^2-z+z^2=x^2+(z-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$. Si $(s,t)\in U$, alors on a $t-s+\frac{1}{4}>0$, donc le point

$$P=\left((t-s+\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}, \tfrac{1}{2}s+\tfrac{1}{2}\left((t-s+\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}\right)^2, (t-s+\tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}+\tfrac{1}{2}\right)$$

appartient à $C(s,t)$.

b) Montrer que $f(y,z) = y + z$ atteint son maximum et son minimum sur $C(s,t)$.

Solution. Pour (s,t) fixé, $C(s,t)$ est compact. En effet, d'une part, on a $x^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = t - s + \frac{1}{4}$ et donc les x, z sont restreints à un cercle. Ensuite, on a $2y = s + z^2$ et donc $s \leq 2y \leq \frac{1}{2} + \sqrt{t - s + 1/4}$. Ainsi, $C(s,t)$ est un fermé borné.

c) Pour chaque $(s,t) \in U$ fixe, montrer que le système de Lagrange de f relatif à $C(s,t)$ possède exactement deux solutions.

Solution. On pose

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y - z^2 - s \\ x^2 + 2y - z - t \end{pmatrix}.$$

On considère que f dépend de x, pour que la taille des matrices dérivées soit correcte. La dérivée de g est

$$g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2z \\ 2x & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Elle est de rang 2 si les déterminants suivants sont non tous nuls :

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2x & 2 \end{vmatrix} = -4x, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 2z \\ 2x & -1 \end{vmatrix} = -4xz, \qquad \begin{vmatrix} 2 & 2z \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4z.$$

Ils sont tous nuls si et seulement si $x = 0$ et $z = -\frac{1}{2}$, mais $(0, y, -\frac{1}{2}) \notin C(s,t)$, donc g est de rang 2 sur $C(s,t)$.

On a

$$\begin{cases} (0,1,1) - (\lambda, \mu) g'(x,y,z) = 0, \\ g(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

On obtient les équations

$$\begin{cases} -2\mu x = 0 \\ 1 - 2\lambda - 2\mu = 0 \\ 1 + 2\lambda z + \mu = 0 \\ 2y - z^2 - s = 0 \\ x^2 + 2y - z - t = 0. \end{cases}$$

D'après la première équation, on a $\mu = 0$ ou $x = 0$. Si $\mu = 0$, alors λ et z sont non nuls et $\lambda = \frac{1}{2}$ et $z = -1$. Dans ce cas, on a $y = \frac{1+s}{2}$ et $x^2 = t - 1 - 1 - s = t - s - 2$, qui est impossible.

Ainsi, on a $x = 0$ et donc $z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{t - s + 1/4}$ et $y = \frac{z^2+s}{2}$. On peut ensuite trouver λ, μ au besoin, puisque les équations 2 et 3 sont linéaires en λ, μ et le déterminant du système est $\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2z & 1 \end{vmatrix} = -2 + 4z \neq 0$.

d) Pour $|s| < \frac{1}{2}$, on note par $m(s)$ le maximum de f sur $C\big(s, s(1-s)\big)$. Calculer $m(0)$.

Solution. En $s = 0$, on a $t = 0$. Ainsi, on a les deux candidats $z = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$ et $y = \frac{z^2}{2}$, c'est-à-dire $(0,0)$ et $(\frac{1}{2}, 1)$. Le maximum est atteint en $(\frac{1}{2}, 1)$ et vaut $\frac{3}{2}$.

e) Montrer que m est dérivable en 0 et calculer $m'(0)$.

Solution. On définit

$$F(s,t,x,y,z,\lambda,\mu)=\begin{pmatrix}(0,1,1)-(\lambda,\mu)g'(x,y,z)\\ g(x,y,z)\end{pmatrix}.$$

On a montré qu'il y a deux solutions $p_1(s,t)$ et $p_2(s,t)$. On trouve $p_1(0,0)=(0,0,0,\frac{3}{2},-1)$ et $p_2(0,0)=(0,\frac{1}{2},1,-\frac{3}{2},2)$. On utilise le théorème des fonctions implicites pour montrer que p_1 et p_2 s'expriment comme des fonctions de classe C^1 en (s,t).

On trouve

$$\frac{\partial F}{\partial(x,y,z,\lambda,\mu)}=\begin{pmatrix}-2\mu & 0 & 0 & 0 & -2x\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 2\lambda & 2z & 1\\ 0 & 2 & -2z & 0 & 0\\ 2x & 2 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Le déterminant est $32x^2\lambda-32z^2\mu+32z\mu-8\mu$. Au point $p_1(0,0)$, il vaut 8 et au point $p_2(0,0)$, -16. Ainsi, par le théorème des fonctions implicites, x,y,z,λ,μ s'expriment en terme de s,t au voisinage de p_1 ou de p_2. On note les fonctions obtenues dans le voisinage de p_i par $x_i,y_i,z_i,\lambda_i,\mu_i$ $(i=1,2)$. On a donc que $p_i(s,t)=\big(x_i(s,t),y_i(s,t),z_i(s,t),\lambda_i(s,t),\mu_i(s,t)\big)$. Ces fonctions sont de classe C^1.

On sait que $F=0$ possède exactement deux solutions pour chaque $(s,t)\in U$ et donc ces solutions sont p_1,p_2. On pose $q_i:=(y_i,z_i)$. Le minimum et le maximum de f sont atteints en p_1 et p_2 respectivement pour $(s,t)=(0,0)$. Par continuité, pour (s,t) petit, on a $f\big(p_1(s,t)\big)<f\big(p_2(s,t)\big)$ et donc p_1 et p_2 sont respectivement le minimum et le maximum pour (s,t) petit.

Puisque $m(s)=(f\circ q_2)(s,s(1-s))$, on obtient que m est une fonction dérivable en 0. Pour calculer $m'(0)$, on calcule d'abord $(f\circ q_2)'(0,0)$. On a que $(f\circ q_2)'=(y_{2,s}+z_{2,s},y_{2,t}+z_{2,t})$, où l'indice s ou t désigne la dérivée partielle par rapport à cette variable. On a

$$0=\frac{\partial}{\partial s}F(s,t,p(s,t))=\frac{\partial F}{\partial s}+\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial s}.$$

On évalue en $p_2(0,0)$. En utilisant les deux dernières lignes, on trouve les équation $2y_{2,s}-2z_{2,s}=1$ et $2y_{2,s}-z_s=0$. On trouve que $y_{2,s}+z_{2,s}=-\frac{3}{2}$. En procédant de la même façon pour t, on trouve $y_{2,t}+z_{2,t}=2$. Enfin, on a

$$m'(0)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(f\circ q_2)(s,s(1-s))\Big|_{s=0}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}.$$

Exercice 28. Trouver le maximum et le minimum de la fonction objectif $f(x,y,z)=y-2x$ sur l'intersection des surfaces $x^3+x+2=y^2+z^2$ et $2x+2=y^2+2z^2$, s'ils existent.

Solution. Dans la seconde équation, on isole y^2 pour obtenir $y^2=2x+2-2z^2$. On remplace dans la première, donc $x^3+x+2=2x+2-2z^2+z^2$. En simplifiant, on obtient $z^2=x-x^3$.

Cette équation n'a de solutions que si $x \leq 1$. Ensuite, on remplace dans l'expression de y^2 et on voit que $y^2 = 2x + 2 - 2(x - x^3) = 2 + 2x^3$. Cette équation n'a de solution que si $x \geq -1$. On a donc montré que $x \in [-1, 1]$ et qu'ainsi y et z sont bornés. On conclut que l'intersection des surfaces est bornée. On sait qu'elle est fermée, puisque chaque surface est fermée, donc l'intersection est compacte. Puisque f est continue, elle atteint son minimum et son maximum.

On pose et on calcule :

$$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 + x + 2 - y^2 - z^2 \\ 2x + 2 - y^2 - 2z^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3x^2+1 & -2y & -2z \\ 2 & -2y & -4z \end{pmatrix}.$$

Les trois mineurs 2×2 sont

$$\begin{vmatrix} 3x^2+1 & -2y \\ 2 & -2y \end{vmatrix} = -2y(3x^2+1) + 4y, \qquad \begin{vmatrix} 3x^2+1 & -2z \\ 2 & -4z \end{vmatrix} = -4z(3x^2+1) + 4z,$$

$$\begin{vmatrix} -2y & -2z \\ -2y & -4z \end{vmatrix} = 4yz.$$

La matrice $g'(x,y,z)$ ne sera pas de rang 2 si

$$2y(1 - 3x^2) = -12zx^2 = 4yz = 0.$$

Si $x = 0$, alors $y = 0$ et z est libre. Par contre, on a $g(0,0,z) \neq 0$ pour tout z, donc on exclus ces points. Ensuite, si $z = 0$, alors on a soit $y = 0$ et x libre, soit $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ et y libre. On voit que $g(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, y, 0) \neq 0$. Pour le dernier cas, on a $g(x,0,0) = 0$ si et seulement si $x = -1$. Ainsi, au point $(-1,0,0)$, la méthode des multiplicateurs de Lagrange ne s'applique pas, donc il faut l'ajouter à la liste des candidats.

Les multiplicateurs de Lagrange donnent

$$\begin{cases} (-2,1,0) - (\lambda,\mu)\begin{pmatrix} 3x^2+1 & -2y & -2z \\ 2 & -2y & -4z \end{pmatrix} = 0, \\ \begin{pmatrix} x^3 + x + 2 - y^2 - z^2 \\ 2x + 2 - y^2 - 2z^2 \end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

On obtient le système

$$\begin{cases} -2 - \lambda(3x^2+1) - 2\mu = 0, \\ 1 + 2\lambda y + 2\mu y = 0, \\ 2\lambda z + 4\mu z = 0, \\ x^3 + x + 2 - y^2 - z^2 = 0, \\ 2x + 2 - y^2 - 2z^2 = 0. \end{cases}$$

De la troisième équation, on a $z = 0$ ou $\lambda = -2\mu$.

$z = 0$: Dans ce cas, les deux dernières équations donnent $x^3 + x = 2x$, donc $x = 0$ ou $x = \pm 1$. Si $x = 0$, alors on trouve $y = \pm\sqrt{2}$ et le système linéaire $\lambda + 2\mu = -2$ et $\lambda + \mu = -\frac{1}{2y}$

est résoluble. Les points $(0, \pm\sqrt{2}, 0)$ sont donc candidats. Si $x = 1$, alors $y = \pm 2$, ce qui donne les candidats $(1, \pm 2, 0)$. Si $x = -1$, alors on a $y = 0$, mais dans cas la deuxième équation est impossible, donc ce point ne satisfait pas au système de Lagrange.

$\lambda = -2\mu$: Les deux première équations deviennent $3x^2\mu = 1$ et $2\mu y = 1$, desquelles on déduit que x, y, μ sont non nuls et que $2y = 3x^2$. L'équation 5 moins deux fois l'équation 4 donne $-2x^3 - 2 + y^2 = 0$ et en substituant y, on trouve $p(x) := 9x^4 - 8x^3 - 8 = 0$. Ensuite, l'équation 5 moins l'équation 4 donne $z^2 = x - x^3 = x(1 - x^2)$. Puisque $z^2 \geq 0$, il faut que $x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$. L'équation 5 montre que x doit être au moins -1, car $y^2 + 2z^2 \geq 0$. On exclut $x = -1$, car on aurait $y = z = 0$. Par conséquent, si le système admet une solution avec $\lambda = -2\mu$, alors $p(x) = 0$ pour un $x \in [0, 1]$.

On montre que p n'a aucun zéro sur $[0, 1]$. On a $p'(x) = 36x^3 - 24x^2 = 12x^2(3x - 2)$ et donc p est décroissante si $x \leq \frac{2}{3}$ et croissante si $x \geq \frac{2}{3}$. Ainsi $p(x) \leq \max\{p(0), p(1)\}$ sur l'intervalle $[0, 1]$, ce qui donne $p(x) \leq -7$. On conclut que p n'a pas de zéro sur $[0, 1]$.

Les candidats sont donc $(0, \pm\sqrt{2}, 0)$, $(1, \pm 2, 0)$, et $(-1, 0, 0)$. On a

$$f(0, \sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}, \qquad f(0, -\sqrt{2}, 0) = -\sqrt{2}, \qquad f(1, 2, 0) = 0,$$
$$f(1, -2, 0) = -4, \quad \text{et} \quad f(-1, 0, 0) = 2.$$

Par conséquent, le minimum de f est -4 et le maximum est 2.

Exercice 29. Soit $a, b, c, d > 0$. Montrer que parmi tous les quadrilatères de côtés a, b, c, d, ceux dont l'aire est maximal ont leurs quatre sommets sur un cercle.
Rappel. Si x et y sont des angles opposés dans un quadrilatère Q, alors Q est inscrit dans un cercle si et seulement si $x + y = \pi$.

Exercice 30. Montrer que pour tous les points (x, y, z) de la surface $xy+xz+yz+x+y+z = 1$ dont la distance à l'origine est 1 vérifient $-\frac{4}{27} \leq xyz \leq 0$.

Exercice supplémentaire

Cette section est optionnelle.

Exercice 31. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que si $f'(z)$ est non nul, alors l'inverse local est holomorphe.