Analyse 3

Série 7 (partielle)

Fonctions implicites

Exercice 1. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. Si f est dérivable sur U, alors f' définit une fonction de $U \to M_{m\times n}$. Montrer que f est de classe C^1 si et seulement si f' est continue.

Exercice 2. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Montrer que si les $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $(j = 1, \dots, n)$ existent et sont bornées dans un voisinage de $x \in U$, alors f est continue en x.
Suggestion. Inspirez-vous de la démonstration du théorème qui montre qu'une matrice jacobienne continue implique que f est de classe C^1.

Exercice 3. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^k, $1 \leq k \leq \infty$. Montrer que si $f'(x)$ est inversible, alors l'inverse local est de classe C^k.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := x + 2x^2 \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) := 0$.

a) Montrer que $f'(0) = 1$ et que f' est borné dans $(-1, 1)$.

b) Montrer que f n'est pas localement injective en 0.

c) Cela contredit-il le théorème d'inversion locale?

Exercice 5. Pour chacune des fonctions $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivantes, déterminer

i) en quels points de $\mathbb{R}^2$ elle est localement inversible;

ii) si elle possède un inverse global sur $\mathbb{R}^2$.

a) $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)^T$.

b) $f(x, y) = (x^3 + x, 3x^3 + y^3 + ay)^T$, $a \in \mathbb{R}$.
Suggestion. Montrez et utilisez le fait que $\varphi_a(z) = z^3 + az$ est une bijection de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si et seulement si $a \geq 0$.

Exercice 6. On pose $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$. Soit $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$

a) En quels points de U la fonction f est-elle localement inversible?

b) Soit $b := f(3/2, 0)$. Calculer $(f^{-1})'(b)$.

c) Calculer $V := f(U)$.

d) La fonction possède-t-elle un inverse global de V sur U?

Exercice 7. Coordonnées sphériques. Pour $(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$\begin{aligned} x &:= r \cos\theta \sin\varphi, \\ y &:= r \sin\theta \sin\varphi, \\ z &:= r \cos\varphi. \end{aligned}$$

Au voisinage de quels points $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ est-il possible d'exprimer r, θ, φ comme des fonctions continues de x, y, z?

Exercice 8. Soit p le polynôme $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont considérés comme des paramètres variables. On sait que si toutes les racines de p sont réelles, alors $p(x) = (x - r)(x - s)(x - t)$ pour certains $r, s, t \in \mathbb{R}$.

a) On suppose qu'en a_0, b_0, c_0, le polynôme p n'admet que des racines réelles, disons r_0, s_0, t_0. Donner une condition suffisante sur r_0, s_0, t_0 pour que les racines de p dans un voisinage de (a_0, b_0, c_0) soit des fonctions dérivables de a, b, c.

b) On suppose que $b, c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables telles que $b(0) = -7$, $c(0) = 6$, $b'(0) = 5$ et $c'(0) = -15$. Quelle racine du polynôme $p(x) = x^3 + b(u)x + c(u)$ est la plus stable en $u = 0$? (c'est-à-dire dont la norme de la dérivée est la plus petite)

Exercice 9. Soit $F\colon M_2 \to M_2$ définie par $F(X) = X^2$. Trouver une condition suffisante sur X pour que F soit inversible au voisinage de X.

Exercice 10. Soit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ouverts, $f\colon U \to V$ un homéomorphisme et $a \in U$. On pose $b = f(a)$ et $g = f^{-1}$ et on suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) \in M_n^{-1}$.

a) Pour k dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, on pose $h(k) = g(b+k) - g(b)$. Montrer qu'il existe des constantes $\delta > 0$ et $C > 0$ telles que si $\|k\| < \delta$, alors $\|h(k)\| \leq C\|k\|$.

b) Déduire que g est dérivable en b et que $g'(b) = f'(a)^{-1}$.

Exercice 11. Théorème d'inversion local, version dérivable. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Si $f'(x)$ existe et est inversible pour tout x, alors f est un homéomorphisme local. Montrer ce théorème dans le cas $n = 1$.
Suggestion. Utilisez le théorème de Rolle.

Remarque. La version générale du théorème utilise le théorème de point fixe de Brouwer, qui dépasse le cours d'analyse 3.

Exercice 12. On considère dans $\mathbb{R}^2$ la courbe C d'équation $xe^y + ye^x = 0$, où $x, y \in \mathbb{R}^2$.

a) Montrer qu'il existe un voisinage U de l'origine et une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\big(x, f(x)\big) \in C$ pour tout $x \in U$.

b) Quelle est l'équation de la tangente à C en $(0, 0)$?

c) Montrer qu'il existe un unique point C où la tangente est horizontale et calculer son abscisse.

Exercice 13. On considère la surface $S \subseteq (0, \infty)^3$ définie par $2x^2z + \log(xyz) + 7 = y^3$.

a) Montrer qu'il existe un unique point de la forme $(1, 2, z_0)$ et calculer z_0.

b) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U de $(1, 2)$ et une fonction $f\colon U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que pour tout $(x, y) \in U$ et tout $z > 0$, on a $(x, y, z) \in S$ si et seulement si $z = f(x, y)$.

c) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

Exercice 14. On suppose que $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0)$ est une solution du système

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z^2 + u^3 + u + v^2 &= -1, \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w &= 10, \\ x + 3z^2 + w + u^2 &= 0. \end{aligned}$$

a) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert de (x_0, y_0, z_0) et des fonctions dérivables u, v, w de (x, y, z) définies sur ce voisinage qui résolvent ce système.

b) Montrer qu'il existe un voisinage ouvert de (u_0, v_0, w_0) et des fonctions dérivables x, y, z de (u, v, w) définies sur ce voisinage qui résolvent ce système.

c) Calculer $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}(x_0, y_0, z_0)$ dans le cas particulier $(x_0, y_0, z_0) = (0, 4, 1)$.

Exercice 15. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la courbe C définie comme étant l'intersection des surfaces $z = x^2 + y$ et $z^2 = y^2 + x$. Montrer qu'il existe exactement un point de C au voisinage duquel il n'est pas possible d'obtenir une représentation paramétrique continue de C de la forme $(x(z), y(z), z)$. Calculer les coordonnées de ce point.

Exercice 16. Pour chacune des fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes, trouver les points $(x_0, y_0) \in C := \{(x,y) \mid f(x,y) = 0\}$ pour lesquels il n'est pas possible de trouver $r > 0$ et $g\colon B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que $g(x_0) = y_0$ et $\big(x, g(x)\big) \in C$ pour tout $x \in B(x_0, r)$.

a) $f(x,y) = 2x^3 + 6xy^2 - 3x^2 + 3y^2$ b) $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2 + 2y^3 + 3y^2$

Exercice 17. Démontrer le théorème d'inversion locale en utilisant le théorème des fonctions implicites.

Exercice 18. Soit $W_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ et $W_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ des ouverts. Soit $f\colon W_1 \times W_2 \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1 des variables $(x,y) \in W_1 \times W_2$. Pour $a \in W_1$, on pose $E(a) := \{b \in W_2 \mid f(a,b) = 0\}$.

a) Soit $a_0 \in W_1$ un point, U un voisinage ouvert de a_0 et K un compact de W_2 tels que

$$|E(a_0)| \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \bigcup_{a \in U} E(a) \subseteq K \subseteq W_2.$$

Montrer que si $\frac{\partial f}{\partial y}(a_0, b)$ est inversible pour tout $b \in E(a_0)$, alors $|E(a)| = |E(a_0)|$ pour tout a dans un voisinage ouvert de a_0.

b) Montrer que pour $W_1 = W_2 = \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y^2 - xy^3 + y - x$ et $a_0 = 0$, la conclusion du a) est fausse. Quelles sont les hypothèses du a) qui ne sont pas satisfaites?

Remarque. La partie a) montre que sous certaines hypothèses, le nombre de solutions $y(x)$ satisfaisant $f\big(x, y(x)\big) = 0$ au voisinage de $x = a_0$ est constant.

Exercice 19. Méthode de l'homotopie. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $H\colon [0,1] \times U \to \mathbb{R}^n$ une fonction* de classe C^1 des variable $(t,x) \in [0,1] \times U$. On pose $F_0(x) := H(0,x)$ et $F(x) = H(1,x)$. On suppose que

- il existe $x_0 \in U$ tel que $F_0(x_0) = 0$;
- $\frac{\partial H}{\partial x}$ est inversible pour tout $(t,x) \in [0,1] \times U$;
- il existe $d > 0$ pour tout $(t,x) \in [0,1] \times U$, on a

$$\left\| \tfrac{\partial H}{\partial x}(t,x)^{-1} \tfrac{\partial H}{\partial t}(t,x) \right\| < d.$$

Montrer qu'il existe $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $H\big(t, g(t)\big) = 0$.

Remarque. Cet exercice est un outil qui aide à trouver numériquement des solutions à des équations non linéaires. Elle est souvent accompagnée d'une autre méthode, comme la méthode de Newton ou de Runge-Kutta. La fonction H s'appelle une homotopie. Si on pose $\mathcal{H} = \{H(t,\cdot) \mid t \in [0,1]\}$, alors $\mathcal{H}$ est une famille de fonctions et H détermine une « courbe continue » entre F_0 et F dans $\mathcal{H}$.

---

* Comme $[0,1] \times U$ n'est pas nécessairement ouvert, on dit que H est de classe C^1 sur $[0,1] \times U$ si H est définie et de classe C^1 sur un ouvert V qui contient $[0,1] \times U$. Ce détail est plus technique qu'important pour l'exercice.

Exercice 20. Homotopie globale. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. Soit $x_0 \in U$. On pose $H(t,x) = F(x) - (1-t)F(x_0)$. On suppose que $\|I - F'(x)\| < 1$ pour tout $x \in U$. Montrer que H vérifie les hypothèses de la méthode de l'homotopie.

Exercice 21. Homotopie convexe. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $F_0, F\colon U \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1. On pose $H(t,x) = (1-t)F_0(x) + tF(x)$, où $t \in [0,1]$. On suppose que :

- il existe $x_0 \in U$ tel que $F_0(x_0) = 0$;
- on a $\|I - F_0'(x)\| \leq k < 1$ et $\|I - F'(x)\| \leq k < 1$;
- il existe $M \geq 0$ tel que $\|F(x) - F_0(x)\| \leq M$ sur U.

Montrer que H vérifie les hypothèses de la méthode de l'homotopie.

Exercice 22. Soit l'équation $\frac{1}{e} + \left(\frac{e-2}{4}\right)(x - x\log(1+x)) = 0$.

a) Montrer qu'il existe une solution dans l'intervalle $I := \left(-\frac{2}{e}, 0\right)$. (On tient pour acquis que $e > 2$.)

b) On définit $F\colon I \to \mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{e} + \left(\frac{e-2}{4}\right)(x - x\log(1+x))$ et $F_0(x) = \frac{1}{e} + x$. Trouver une homotopie $H\colon [0,1] \times I \to \mathbb{R}$ telle que $H(0,x) = F_0(x)$, $H(1,x) = F(x)$ et H est de classe C^1.

c) Montrer que ce H vérifie les hypothèses de la méthode de l'homotopie.

d) Soit $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction donner par la méthode. Trouver une équation différentielle et une condition initiale que g vérifie et adéquates pour utiliser la méthode de Runga-Kutta.

Exercice 23. Soit $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1. En utilisant le théorème de Peano*, montrer que si $f(t_0, x_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(t_0, x_0)$ est inversible, alors il existe $g\colon I \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $g(t_0) = x_0$ et $f\big(t, g(t)\big) = 0$.

Exercice 24. Trouver dans $\mathbb{R}^3$ le minimum et le maximum de la fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x^2 + 2y^2 = z^2 + 1$.

Exercice 25. Calculer la distance entre l'origine et la courbe

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - xy + y^2 - z^2 = x^2 + y^2 = 4\}.$$

Exercice 26. Soit $a, b, c > 0$. Quelle est la valeur maximale du produit xy^2z^3 sur le triangle défini par $ax + by + cz = 1$ et $x, y, z \geq 0$?

---

* Si $h\colon U \to \mathbb{R}^n$ est continue, alors le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = h(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$ possède au moins une solution.

Exercice 27. On pose $U = \big\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid -\frac{1}{4} < t - s < 2\big\}$ et on considère les courbes

$$C(s,t) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - z^2 = s \text{ et } x^2 + 2y - z = t\}, \qquad \text{pour } (s,t) \in U.$$

a) Montrer que $C(s,t) \neq \emptyset$.

b) Montrer que $f(y,z) = y + z$ atteint son maximum et son minimum sur $C(s,t)$.

c) Pour chaque $(s,t) \in U$ fixe, montrer que le système de Lagrange de f relatif à $C(s,t)$ possède exactement deux solutions.

d) Pour $|s| < \frac{1}{2}$, on note par $m(s)$ le maximum de f sur $C\big(s, s(1-s)\big)$. Calculer $m(0)$.

e) Montrer que m est dérivable en 0 et calculer $m'(0)$.

Exercice 28. Trouver le maximum et le minimum de la fonction objectif $f(x,y,z) = y - 2x$ sur l'intersection des surfaces $x^3 + x + 2 = y^2 + z^2$ et $2x + 2 = y^2 + 2z^2$, s'ils existent.

Exercice 29. Soit $a, b, c, d > 0$. Montrer que parmi tous les quadrilatères de côtés a, b, c, d, ceux dont l'aire est maximal ont leurs quatre sommets sur un cercle.
Rappel. Si x et y sont des angles opposés dans un quadrilatère Q, alors Q est inscrit dans un cercle si et seulement si $x + y = \pi$.

Exercice 30. Montrer que pour tous les points (x,y,z) de la surface $xy + xz + yz + x + y + z = 1$ dont la distance à l'origine est 1 vérifient $-\frac{4}{27} \leq xyz \leq 0$.

Exercice supplémentaire

Cette section est optionnelle.

Exercice 31. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Montrer que si $f'(z)$ est non nul, alors l'inverse local est holomorphe.