Analyse 3

Série 6 (solutionnaire partiel)

Dérivation des fonctions de plusieurs variables

Exercice 1. Soit $(X, \|\cdot\|')$ un espace vectoriel normé tel que $\dim X = n \in \mathbb{N}$ et soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de X. Construire une bijection $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to X$ et une norme $\|\cdot\|''$ sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \qquad \text{et} \qquad \|\varphi(x)\|' = \|x\|''$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Solution. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On pose $\varphi(e_j) := v_j$ et pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on pose

$$\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n).$$

Définie ainsi, φ est linéaire et bijective. Ensuite, on définit $\|x\|'' := \|\varphi(x)\|'$. On vérifie que c'est bien une norme.

1. On a que $x = 0$ ssi $\varphi(x) = 0$ ssi $\|\varphi(x)\|' = 0$, donc ssi $\|x\|'' = 0$.
2. Ensuite, on a $\|\alpha x\|'' = \|\varphi(\alpha x)\|' = \|\alpha\varphi(x)\|' = |\alpha|\|\varphi(x)\|' = |\alpha|\|x\|''$.
3. Et enfin, on l'inégalité triangulaire :

$$\|x+y\|'' = \|\varphi(x+y)\|' = \|\varphi(x) + \varphi(y)\|' \leq \|\varphi(x)\|' + \|\varphi(y)\|' = \|x\|'' + \|y\|''.$$

Exercice 2. On définit $\|\cdot\|' \colon M_{m\times n} \to [0, \infty]$ par $\|A\|' = \sup_{x\in S} \|Ax\|$, où $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

a) Montrer que $\|\cdot\|'$ est une norme sur $M_{m\times n}$.

b) Montrer que $\|Ax\| \leq \|A\|'\|x\|$ pour toute $A \in M_{m\times n}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

c) Montrer que $\|AB\|' \leq \|A\|'\|B\|'$ pour toute $A \in M_{m\times n}$ et toute $B \in M_{n\times p}$.

Exercice 3. Une matrice $B \in M_n$ est dite *orthogonale* si $AA^T = A^TA = I$. La *trace* d'une matrice $A \in M_n$ est le nombre $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$. Soit $Q \in M_n$ orthogonale et soit $A \in M_{m\times n}$.

a) Montrer que $\|A\| = \|A^T\|$.

b) Montrer que $\|A\| = \operatorname{tr}(A^TA)^{1/2}$.

c) Montrer que $\|AQ\| = \|A\|$.

d) Montrer que $\|Q\| = \sqrt{n}$.

Solution. a) On pose $A = (a_{ij})$ et $A^T = (b_{ij})$. On a donc $b_{ij} = a_{ji}$. Ainsi, il suit que

$$\|A\|^2 = \sum_i \sum_j a_{ij}^2 = \sum_j \sum_i a_{ji}^2 = \sum_j \sum_i b_{ij}^2 = \|A^T\|^2.$$

b) L'entré ij de A^TA est $\sum_k b_{ik}a_{kj} = \sum_k a_{ki}a_{kj}$. Ainsi, on a

$$\operatorname{tr}(A^TA) = \sum_i \left(\sum_k a_{ki}a_{ki} \right) = \sum_i \sum_k a_{ki}^2 = \|A\|^2.$$

c) On a

$$\|AQ\|^2 = \|(AQ)^T\|^2 = \operatorname{tr}\left(AQ(AQ)^T\right) = \operatorname{tr}(AQQ^TA^T) = \operatorname{tr}(AA^T) = \|A\|^2.$$

d) On a $\|Q\|^2 = \operatorname{tr}(Q^TQ) = \operatorname{tr}(Id) = n$.

Exercice 4. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ une fonction et $a \in U$ un point. Montrer que si f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est unique.

Exercice 5. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. Montrer que si $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ est constante, alors $f'(a) = 0$ pour tout $a \in U$.

Exercice 6. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie par $f(x) = Ax + b$, où $A \in M_{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, calculer $f'(a)$.

b) On pose $g(a) := f'(a)$. C'est une fonction de $U \to M_{m\times n}$. Calculer $g'(a)$. Quelle est la dimension de la matrice qui représente $g'(a)$ comme application linéaire?

Solution. a) On a $f'(a) = A$. En effet, on voit que

$$f(a+h) - f(a) = A(a+h) - Aa = Ah,$$

donc le reste $r(h)$ est identiquement nul.

b) Puisque g est constante, on sait que $g'(a) = 0$ pour tout a. Ensuite, $g'(a)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to M_{m\times n}$. Si on identifie $M_{m\times n}$ à $\mathbb{R}^{mn}$, alors $g'(a)$ sera la matrice $0_{mn\times n}$.

Exercice 7. On fixe $A \in M_n$. Soit $f\colon M_{m\times n} \to M_m$ définie par $f(X) = XAX^T$. Pour $B \in M_{m\times n}$, montrer que f est dérivable en B et calculer $f'(B)$.

Solution. On voit que

$$\begin{aligned} f(B+H) - f(B) &= (B+H)A(B+H)^T - BAB^T \\ &= BAB^T - HAB^T - BAH^T - HAH^T - BAB^T \\ &= -HAB^T - BAH^T - HAH^T. \end{aligned}$$

On pose $L(H) = -HAB^T - BAH^T$, c'est une application linéaire. On pose ensutie $r(H) = HAH^T$. On a

$$\frac{\|r(H)\|}{\|H\|} = \frac{\|HAH^T\|}{\|H\|} \leq \frac{\|H\|\|A\|\|H^T\|}{\|H\|} = \|H\|\|A\| \to 0 \quad \text{lorsque } H \to 0.$$

Exercice 8. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f_n \colon U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, des fonctions. Montrer que $f := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ est dérivable en $a \in U$ si et seulement si f_i est dérivable en $a \in U$ pour chaque i.

Exercice 9. Règle de Leibniz (ou règle du produit). Une application $\bullet \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^k$ est dite *bilinéaire* si pour tout $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, pour tout $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^\ell$ et pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x \bullet (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= \alpha_1 (x \bullet y_1) + \alpha_2 (x \bullet y_2) \\ \text{et} \quad (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \bullet y &= \alpha_1 (x_1 \bullet y) + \alpha_2 (x_2 \bullet y). \end{aligned}$$

a) Vérifier que les applications suivantes sont bilinéaires.
   - *i)* Le produit usuel sur $\mathbb{R}$.
   - *ii)* Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.
   - *iii)* Le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.
   - *iv)* Le produit matriciel de $M_{m\times n} \times M_{n\times p}$ dans $M_{m\times p}$.

Soit $\bullet \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^k$ une application bilinéaire et soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \colon U \to \mathbb{R}^m$ et $g \colon U \to \mathbb{R}^\ell$ des fonctions dérivables en $a \in U$.

b) Montrer qu'il existe M telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et tout $y \in \mathbb{R}^\ell$, on a $\|x \bullet y\| \leq M\|x\|\|y\|$.

c) Déduire que $f \bullet g \colon U \to \mathbb{R}^k$ est dérivable en a et que

$$(f \bullet g)'(a)h = f'(a)h \bullet g(a) + f(a) \bullet g'(a)h$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

Solution. b) On a

$$\begin{aligned}
\|x \bullet y\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \bullet \sum_{j=1}^{\ell} y_j e_j \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\ell} x_i y_j (e_i \bullet e_j) \right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\ell} |x_i||y_j|\|e_i \bullet e_j\| \\
&\leq \|x\|\|y\| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\ell} \|e_i \bullet e_j\|.
\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité avec $M = \sum_i \sum_j \|e_i \bullet e_j\|$.

c) Puisque f et g sont dérivable en a, on a

$$\begin{aligned}
(f \bullet g)(a+h) &= f(a+h) \bullet g(a+h) \\
&= \big(f(a) + f'(a)h + o(h)\big) \bullet \big(g(a) + g'(a)h + o(h)\big) \\
&= f(a) \bullet g(a) + f(a) \bullet g'(a)h + f(a) \bullet o(h) \\
&\qquad + f'(a)h \bullet g'(a) + f'(a)h \bullet g'(a)h + f'(a)h \bullet o(h) \\
&\qquad\qquad + o(h) \bullet g(a) + o(h) \bullet g'(a)h + o(h) \bullet o(h).
\end{aligned}$$

On pose $L(h) = f(a) \bullet g'(a)h + f'(a)h \bullet g(a)$, c'est une application linéaire. On montre que le reste $R(h) := f'(a)h \bullet g'(a)h + f'(a)h \bullet o(h) + o(h) \bullet g(a) + o(h) \bullet g'(a)h + o(h) \bullet o(h)$ est un $o(h)$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\|R(h)\|}{\|h\|} &\leq \frac{\|f'(a)h \bullet g'(a)h\|}{\|h\|} + \frac{\|f'(a)h \bullet o(h)\|}{\|h\|} \\
&\qquad + \frac{\|o(h) \bullet g(a)\|}{\|h\|} + \frac{\|o(h) \bullet g'(a)h\|}{\|h\|} + \frac{\|o(h) \bullet o(h)\|}{\|h\|}
\end{aligned}$$

En utilisant la partie b), on voit que chacun des termes de la somme va tendre vers 0 lorsque $h \to 0$.

Exercice 10. Utiliser l'exercice précédent pour calculer la dérivée de $f \colon M_n \to M_n;\ X \mapsto X^3$ en $A \in M_n$.

Solution. On a vu en classe que la dérivée de $g(X) = X^2$ en B vaut $g'(B) = BH + HB$. On a $f(X) = (g \bullet id)(X)$, où $\bullet$ est la multiplication de matrice. Comme g et l'identité sont dérivables, on peut utiliser la règle du produit pour obtenir

$$f'(B) = (g \bullet id)'(B) = g'(B)H \bullet B + g(B) \bullet H = (BH + HB)B + B^2H = BHB + HB^2 + B^2H.$$

Exercice 11. a) Soit $X \in M_n$ une matrice telle que $\|X\| < 1$. Montrer que $I - X$ est inversible, où I est la matrice identité.
Suggestion. Inspirez-vous des séries géométriques et de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

b) Montrer que si $X \in M_n^{-1}$, alors $B\big(X, \frac{1}{\|X^{-1}\|}\big) \subseteq M_n^{-1}$. En déduire que M_n^{-1} est ouvert.

c) On définit $F\colon M_n^{-1} \to M_n^{-1}$ par $F(X) = X^{-1}$. Montrer que F est dérivable en chaque $A \in M_n^{-1}$ et que $F'(A)$ est l'application linéaire $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
Suggestion. Utilisez le fait que $(A+H)^{-1} = A^{-1}(I + HA^{-1})^{-1}$ et la partie a0 avec $X = -HA^{-1}$.

Exercice 12. Soit $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x) = \left(\begin{smallmatrix} 2x_2 + x_1 \cos 1x_3 \\ x_2 \sin x_1 \end{smallmatrix}\right)$. Montrer que f est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}^3$ et calculer $f'(a)$.

Exercice 13. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq 0$ et 0 sinon.

a) Montrer que f est continue.

b) Soit $\varphi\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ dérivable en 0 et telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) \neq (0,0)$. Montrer que $f \circ \varphi$ est dérivable est en 0 et calculer $(f \circ \varphi)'(0)$.

c) Montrer que $f_x(0)$ et $f_y(0)$ existent et les calculer.

d) Montrer que f n'est pas dérivable en $(0,0)$.

Solution. a) Il est clair que f est continue si $(x,y) \neq (0,0)$, puisque c'est le quotient de polynômes. Ensuite, on a

$$|f(x,y)| = \frac{|x^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^3|}{x^2} = |x| \to 0$$

lorsque $(x,y) \to (0,0)$, d'où f est continue en $(0,0)$.

b) Soit φ_1, φ_2 telles que $\varphi = \left(\begin{smallmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{smallmatrix}\right)$. On a

$$\frac{f\circ\varphi(t) - f\circ\varphi(0)}{t} = \frac{1}{t}\frac{\varphi_1(t)^3}{\varphi_1(t)^2 + \varphi_2(t)^2}\frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}} = \frac{\left(\frac{\varphi_1(t)}{t}\right)^3}{\left(\frac{\varphi_1(t)}{t}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_2(t)}{t}\right)^2} \to \frac{\varphi_1'(0)^3}{\varphi_1'(0)^2 + \varphi_2'(0)}$$

lorsque $t \to 0$.

c) Il suffit de prendre $\varphi_1(t) = t$ et $\varphi_2(0) = 0$ pour obtenir f_x. On trouve $f_x(0,0) = 1$. Pour f_y, on prend $\varphi_1(t) = 0$ et $\varphi_2(t) = t$ et on trouve $f_y(0,0) = 0$.

d) Si f est dérivable en $(0,0)$, alors la dérivée doit être la matrice $A = (1,0)$. On pose

$$r(h,k) = f(h,k) - (1,0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \frac{h^3}{h^2+k^2} - h = \frac{h^3 - h^3 - hk^2}{h^2+k^2} = -\frac{hk^2}{h^2+k^2}.$$

Ensuite, on a

$$\frac{|r(h,k)|}{\|(h,k)\|} = \frac{hk^2}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Si $h = k$, alors on voit que

$$\frac{|r(h,h)|}{\|(h,h)\|} = \frac{h^3}{2^{\frac{3}{2}}h^3} \not\to 0$$

lorsque $h \to 0$. D'où f n'est pas dérivable en $(0,0)$.

Exercice 14. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(u,v) = (u, ve^u, ue^v) \qquad \text{et} \qquad g(x,y,z) = xz + yz + x.$$

On pose $h := g \circ f$. Calculer $h'(1,0)$.

Exercice 15. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|f(x)\| = 1$. Montrer que $f(x)^T f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution. Par hypothèse, on a $\|f(x)\| = f(x) \bullet f(x) = 1$, où $\bullet$ est le produit scalaire. On utilise la règle du produit :

$$0 = f'(x)h \bullet f(x) + f(x) \bullet f'(x)h = 2hf(x) \bullet f'(x) = 2hf(x)^T f'(x).$$

Comme cela est vrai pour tout scalaire h, on obtient la conclusion.

Exercice 16. Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x(r,\theta) = r\cos\theta$ et $y(r,\theta) = r\sin\theta$, les coordonnées polaires.

a) Montrer que $z(r,\theta) := \left(\begin{smallmatrix} x(r\theta) \\ y(r\theta) \end{smallmatrix}\right)$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer $z'(r,\theta)$.

b) Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $g(r,\theta) = f\big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 17. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in U$. Calculer $\nabla\big(\frac{1}{f}\big)(a)$ si $f(a) \neq 0$.

Exercice 18. Dérivée directionnelle. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in U$. Pour chaque vecteur unitaire $u \in \mathbb{R}^n$, on définit la *dérivée directionnelle* de f en a dans la reiction u par $D_u f(a) = (f \circ \gamma)'(0)$, où $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est définie par $\gamma(t) = a + tu$.

a) Montrer que $D_u f(a) = \nabla f(a) u$.

b) Montrer que $D_{e_j} f(a) = f_{x_j}(a)$.

c) Montrer que $-\|\nabla f(a)\| \leq D_u f(a) \leq \|\nabla f(a)\|$ pour tout u.

d) Montrer que si $\nabla f(a) \neq 0$, alors on a $D_v f(a) = \|\nabla f(a)\|$ et $D_{-v} f(a) = -\|\nabla f(a)\|$, où $v = \frac{\nabla f(a)^T}{\|\nabla f(a)\|}$.

Exercice 19. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit $a, b \in U$ tels que $[a, b] \subseteq U$.

a) Montrer que si $\|f'(x)\| \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, alors
$$|f(b) - f(a) - \textstyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} f(a)(b_j - a_j)| \leq 2M\|b - a\|.$$

b) Montrer que si f est de classe C^1, alors on a
$$|f(b) - f(a)| \leq R\|b - a\|,$$
où $R = \sum\limits_j \sup_{[a,b]} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|$.

c) Encore sous l'hypothèse que f est de classe C^1, montrer que
$$|f(b) - f(a) - \textstyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} f(a)(b_j - a_j)| \leq \|b - a\| \displaystyle\sum_{j=1}^d \sup_{x \in [a,b]} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right|.$$

Solution. a) On pose
$$g(x) := f(x) - \nabla f(a)x = f(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} x_j.$$
Puisque f est dérivable, il suit que g est dérivable. De plus, on a $g'(x) = \nabla f(x) - \nabla f(a)$ et donc $\|g'(x)\| \leq \|\nabla f(x)\| + \|\nabla f(a)\| \leq 2M$. Par le théorème de la moyenne, on trouve
$$|g(b) - g(a)| = |f(b) - f(a) - \nabla f(a)(b - a)| \leq 2M\|b - a\|.$$

b) On pose $\gamma(t) = f\big(a + t(b - a)\big)$, où $t \in [0, 1]$. Par hypothèse, γ est de classe C^1 et la dérivée vaut $\gamma'(t) = f'\big(a + t(b - a)\big)(b - a)$. Le théorème fondamental du calcul donne
$$\begin{aligned}
|\gamma(1) - \gamma(0)| &= |f(b) - f(a)| \\
&= \left|\int_0^1 \gamma'(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leq \int_0^1 |f'\big(a + t(b - a)\big)(b - a)|\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}\big(a + t(b - a)\big)(b_j - a_j)\right| \mathrm{d}t \\
&\leq \|b - a\| \int_0^1 \sum_{j=1}^n \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\big(a + t(b - a)\big)\right| \mathrm{d}t \\
&\leq \|b - a\| \int_0^1 R\mathrm{d}t = R\|b - a\|.
\end{aligned}$$

c) On applique l'inégalité du b) à la fonction $g(x) = f(x) - f(a) - \nabla f(a)x$.

Exercice 20. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ une fonction $a, b \in U$ des points. Soit γ une courbe de classe C^1 dans U joignant a à b, c'est-à-dire que $\gamma\colon [0,1] \to U$ est continûment dérivable et $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Montrer que si f est dérivable en chaque point de γ, si $\|f'(\gamma(t))\| \leq M$ pour tout t et si $(f \circ \gamma)'$ est continue, alors on a $\|f(b) - f(a)\| \leq ML(\gamma)$, où $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$ (la longueur de γ).

Suggestion. Inspirez-vous de la démonstration du théorème de la moyenne et de la solution de l'exercice précédent.

Exercice 21. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(\|x\|)$. Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$. (Attention, f n'est pas dérivable en 0.)

Solution. Pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} \begin{pmatrix} \frac{x_1}{\|x\|} & \cdots & \frac{x_n}{\|x\|} \end{pmatrix}$$

Ainsi, on voit que

$$\|f'(x)\|^2 = \frac{1}{1 + \|x\|^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j^2}{\|x\|^2} = \frac{1}{1 + \|x\|^2} \leq 1.$$

Ainsi, si $\vec{0} \notin [x, y]$, alors par le théorème de la moyenne, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|.$$

Si $x, y \neq 0$ et $\vec{0} \in [x, y]$, alors il existe $t \in (0,1)$ tel que $x + t(y - x) = 0$, c'est-à-dire que $y = \frac{t-1}{t}x$. De plus, on doit avoir $\vec{0} \notin [x, -y]$, sinon il existe $s \in (0,1)$ tel que $x + s(-y-x) = 0$ et donc $y = \frac{t-1}{t}x = \frac{1-s}{s}x$, ce qui est impossible, puisque $s, t \in (0,1)$. On pose $\alpha = \frac{t-1}{t} < 0$, de sorte que $y = \alpha x$ et $-y = -\alpha x$. Le paragraphe précédent s'applique sur $[x, -y]$:

$$|f(x) - f(-y)| \leq \|x + y\| = \|x + \alpha x\| = |1 + \alpha|\|x\| \leq (1 - \alpha)\|x\| = \|x - \alpha x\| = \|x - y\|.$$

Enfin, si $y = 0$, alors on doit montrer que $\arctan \|x\| \leq \|x\|$. On pose $g(t) = \arctan t - t$. On a $g'(t) = \frac{1}{1+t^2} - 1 = \frac{1-1-t^2}{1+t^2} < 0$ pour tout t. Ainsi, g est strictement décroissante. Puisque $g(0) = 0$, on a $g(t) \leq 0$, c'est-à-dire $\arctan t - t \leq 0$ pour $t \geq 0$, comme voulu.

Exercice 22[†]. Partition de l'unité. Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compact et soit $U_1, \ldots, U_n \subseteq \mathbb{R}^n$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$.

a) Montrer qu'il existe une fonction $\psi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ de classe C^1 telle que $\psi(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $\psi(x) = 1$ si $x \geq 1$.

b) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $K \subset U$ un compact. Montrer qu'il existe $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ telle que $\varphi(x) = 1$ sur un voisinage de K et $\varphi(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus U$.
Indice. Si $x \in K$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, 2r) \subseteq U$. Recouvrez K par de telles boules et considérez la fonction $y \mapsto \psi\left(3 - \frac{\|y-x\|^2}{r^2}\right)$.

c) Montrer qu'il existe $\psi_1, \ldots, \psi_n\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ telles que

i) $\psi_j(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus U_j$;

ii) $\sum_{j=1}^{n} \psi_j(x) = 1$ sur un voisinage de K.
Indice. Commencez par montrer qu'il existe des compact $K_1, \cdots, K_n$ tels que $K_j \subseteq U_j$ et $K \subseteq K_1^\circ \cup \cdots \cup K_n^\circ$.

d)†† Refaire le numéro en remplaçant C^1 par C^∞.

e) Montrer qu'il existe une infinité de fonctions de $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ qui, en chaque naturel n, vaut $n!$.

Solution. a) On définit

$$\varphi(x) = \begin{cases} \max\{0, x\}^2, & \text{si } x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right], \\ -\min\{0, (x-1)\}^2 + \frac{1}{2}, & \text{si } x \in \left(\frac{1}{2}, \infty\right). \end{cases}$$

Ensuite, on peut prendre $\psi(x) := 2\varphi(x)$. Ce n'est pas le seul choix possible.

b) Pour chaque $x \in K$, il existe $r_x > 0$ tel que $\overline{B}(x, 2r_x) \subseteq U$. Les boules $\{B(x, r_x)\}_{x \in K}$ forment un recouvrement ouvert de K, donc il existe un sous-recouvrement fini, disons $B(x_1, r_{x_1}), \ldots, B(x_n, r_{x_n})$.

On pose $\rho_j(x) = \psi\left(3 - \frac{\|x-x_j\|^2}{r_j^2}\right)$, où $r_j := r_{x_j}$. Définie ainsi, on a $\rho_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $0 \leq \rho_j \leq 1$. De plus, on a

$$\rho_j(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in B(x_j, r_j) \\ 0, & \text{si } x \notin \overline{B}(x, 2r_j). \end{cases}$$

Enfin, on pose

$$\varphi(x) = 1 - \prod_{j=1}^{n} \big(1 - \rho_j(x)\big).$$

On a alors que $\varphi(x) = 1$ sur $\bigcup_{j=1}^n B(x_j, r_j)$ et que $\varphi(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j=1}^n \overline{B}(x_j, 2r_j)$.

c) Il existe $K_j \subset U_j$ compact tel que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^n K_j^\circ$ (exercice).

Par le b), il existe ρ_j tel que $\rho_j = 1$ sur K_j et $\rho_j = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus U_j$. On définit

$$\begin{aligned} \psi_1 &:= \rho_1 \\ \psi_2 &:= (1-\rho_1)\rho_2 \\ \psi_3 &:= (1-\rho_1)(1-\rho_2)\rho_3 \\ &\vdots \\ \psi_n &:= (1-\rho_1)\cdots(1-\rho_{n-1})\rho_n. \end{aligned}$$

Alors $\psi_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$ pour tout j et $\psi_j = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus U_j$.

Enfin, on a
$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1-\rho_j).$$
En effet, par récurrence, on suppose le cas $n-1$ vrai. On a
$$\sum_{j=1}^{n} \psi_j = 1 - \prod_{j=1}^{n-1}(1-\rho_j) + \prod_{j=1}^{n-1}(1-\rho_j)\rho_n = 1 - \prod_{j=1}^{n}(1-\rho_j).$$
Cette dernière vaut 1 sur $\bigcup_{j=1}^{n} K_j^\circ$, qui est un voisinage de K.

e) Il y a une infinité de fonctions de classe C^∞ définit sur $B(1,1)$ qui vaut 1 en 1 (p.ex. $x \mapsto x + (x-1)^m$ quelque soit $m \in \mathbb{N}$). Soit f l'une de ces fonctions. On la prolonge sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \notin B(1,1)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $\rho_n\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ telle que $\rho_n(x) = 1$ sur $B\big(n, \frac{1}{4}\big)$ et $\rho_n(x) = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus B\big(n, \frac{1}{2}\big)$. Le produit $f(x-n+1)\rho_n(x)$ est de classe C^∞. On définit
$$g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j!\, f(x-j+1)\rho_j(x).$$
Pour chaque x, g est une somme finie, puisque $\rho_n(x) = 0$ pour tout les ρ_n sauf peut-être un. On voit que $g(n) = n!$ et que g est de classe C^∞.

Exercice 23. Soit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ des ouverts non vide et $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Montrer que si pour toute $\varphi\colon V \to U$ dérivable, on a $f \circ \varphi$ dérivable, alors f est dérivable.
Indice. Utilisez la partie b) du numéro précédent pour construire une bonne φ dans un voisinage de $a \in V$.

Solution. Soit $b \in U$ et $a \in V$. Il existe $r > 0$ tel que $\overline{B}(b, 2r) \subseteq U$ et $\overline{B}(a, 2r) \subseteq V$. Par le numéro précédent, il existe $\psi\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ telle que $\psi(x) = 1$ si $x \in B(a, r)$ et $\psi(x) = 0$ si $x \in \overline{B}(x, 2r)$. On définit
$$\varphi(x) = (x-a)\psi(x) + b.$$
Cette fonction est de classe C^1 et elle est définie de $V \to U$. En effet, on a
$$\|\varphi(x) - b\| = \|(x-a)\psi(x) + b - b\| = \psi(x)\|x-a\| \leq 2r.$$
Ainsi, on a $\varphi(x) \in \overline{B}(b, 2r) \subseteq V$. De plus, pour $x \in B(a, r)$, on a $\varphi(x) = b - a + x$.

Par hypothèse, $f \circ \varphi$ est dérivable, donc on pose $A := (f \circ \varphi)'(a)$. Ainsi, pour $\|h\| < r$, on voit que
$$\frac{\|f(b+h) - f(b) - Ah\|}{\|h\|} = \frac{\|f \circ \varphi(a+h) - f \circ \varphi(a) - Ah\|}{\|h\|}.$$
Puisque que $f \circ \varphi$ est dérivable, on conclut que le côté droit tend vers 0 lorque $h \to 0$. D'où on a $f'(b) = A$.

Exercice 24. Espace tangent. Soit (X,d) un espace métrique. Soit $U \subseteq X$ un ouvert. On suppose que pour tout $x \in U$, il existe un homéomophisme φ_x local en x vers $\mathbb{R}^n$ (il existe U' un voisinage de x, V un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi: U' \to V$ un homéomorphisme tel que $\varphi(x) = 0$) tel que $\varphi_x \circ \varphi_b^{-1}$ est dérivable là où la composition est possible avec une dérivée inversible. On dit que ψ est une *carte* en x si ψ est un homéomorphisme local en x vers $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $b \in U$, $\psi \circ \varphi_b^{-1}$ est dérivable là où la composition est possible. Soit $f: U \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède la propriété suivante : pour toute carte ψ en $a \in U$, la composée $f \circ \psi^{-1}$ est dérivable en 0.

a) Montrer que si $X = \mathbb{R}^n$ et si U est muni des homéomorphismes $T_x: h \mapsto h - x$, alors f est dérivable en a.

Solution. On a que T_a est une carte, car pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il est clair que $T_a \circ T_x^{-1}$ est dérivable. Ainsi, par hypothèse, on a que $f \circ T_a^{-1}(h) = f(a+h)$ est dérivable en $h = 0$, d'où $f'(a) = (f \circ T_a^{-1})'(0)$.

Ceci motive la définition suivante : on dit que f est *dérivable* en a si elle est telle que dans l'énoncé. Pour le reste u problème, on suppose que f est dérivable au sens de l'énoncé.

b) On suppose maintenant que (X,d) est un espace métrique quelconque. Soit $\varepsilon > 0$ et $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ une courbe telle que $\gamma(0) = a$. On dit que γ est dérivable en 0 si $\varphi \circ \gamma$ est derivable en 0 pour toute carte φ en a. Montrer que $f \circ \gamma$ est dérivable en 0.

Solution. Pour toute carte φ en a, on a $f \circ \gamma = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$. Le côté droit est la composition de deux fonctions dérivables, donc le côté gauche est dérivable.

c) Soit φ et ψ deux cartes en a. Montrer que si γ_1, γ_2 sont deux courbes dérivables en 0 telles que $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$, alors on a $(\psi \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0)$. Montrer que ceci définit une relation d'équivalence $\sim$ sur les courbes $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ dérivable en 0 avec $\gamma(0) = a$.

Solution. On a

$$\begin{aligned}
(\psi \circ \gamma_1)'(0) &= (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma_1)'(0) \\
&= (\psi \circ \varphi^{-1})'(0)(\varphi \circ \gamma_1)'(0) \\
&= (\psi \circ \varphi^{-1})'(0)(\varphi \circ \gamma_2)'(0) \\
&= (\psi \circ \gamma_2)'(0)
\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des courbes $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ telles que $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0)$ existe. On définit la relation $\sim$ sur $\mathcal{C}$ par $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ssi il existe une carte φ en a telle que $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$.

La relation est réflexive, puisqu'on peut prendre n'importe quelle carte φ pour avoir l'égalité. Elle est symétrique. Pour la transitivité, si on a $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$ et $(\psi \circ \gamma_2)'(0) = (\psi \circ \gamma_3)'(0)$ pour deux cartes φ, ψ en a et $\gamma_{1,2,3} \in \mathcal{C}$, alors par ce qui a été montré, on a également $(\varphi \circ \gamma_2)'(0) = (\varphi \circ \gamma_3)'(0)$, d'où $\gamma_1 \sim \gamma_3$.

d) On note les classes d'équivalence par $[\gamma]$. On pose

$$T_x U := \{[\gamma] : \gamma(0) = a \text{ et } \gamma \text{ est dérivable en } 0\}.$$

On appelle $T_x U$ l'*espace tangent* de U en x. Montrer que si φ est une carte en a, alors φ induit une application $L_\varphi: T_x U \to \mathbb{R}^n$ bijective.

Solution. On définit L_φ par $L_\varphi[\gamma] := (\varphi \circ \gamma)'(0)$. Il est clair que L_φ est injective, car si $[\gamma_1]$ et $[\gamma_2]$ sont telles que $L_\varphi[\gamma_1] = L_\varphi[\gamma_2]$, alors on a $\gamma_1 \sim \gamma_2$, donc $[\gamma_1] = [\gamma_2]$.

Pour la surjectivité, soit $v \in \mathbb{R}^n$ et soit $\gamma(t) = \varphi^{-1}(a + tv)$. On a alors

$$L_\varphi[\gamma] = (\varphi \circ \gamma)'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi \circ \varphi^{-1}(a + tv)\Big|_{t=0} = v.$$

e) On définit $+\colon T_xU \times T_xU \to T_xU$ par $[\alpha] + [\beta] = L_\varphi^{-1}(L_\varphi([\alpha]) + L_\varphi([\beta]))$. Montrer que si ψ est une autre carte en a, alors L_ψ définit la même loi de composition interne $+$. Autrement dit, la définition de $+$ ne dépend pas du choix de carte.

Solution. Soit ψ une autre carte local en a. On a

$$\begin{aligned} L_\psi[\alpha] &= (\psi \circ \alpha)'(0) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)'(0) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1})'(0)(\varphi \circ \alpha)'(0) \\ &= (\psi \circ \varphi^{-1})'(0)L_\varphi[\alpha] \end{aligned}$$

On pose $A = (\psi \circ \varphi^{-1})'(0)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ inversible par hypothèse. Ainsi, on a $L_\psi = AL_\varphi$ et $L_\varphi^{-1} = L_\varphi^{-1}A^{-1}$. On obtient

$$L_\psi^{-1}\big(L_\psi[\alpha] + L_\psi[\beta]\big) = L_\varphi^{-1}A^{-1}\big(AL_\varphi[\alpha] + AL_\varphi[\beta]\big) = L_\varphi^{-1}\big(L_\varphi[\alpha] + L_\varphi[\beta]\big),$$

comme voulu.

f) Définir la multiplication par une scalaire comme au e) et montrer que cette définition ne dépend pas du choix de carte. Montrer que T_xU muni de $+$ et de la multiplication par un scalaire forme un espace vectoriel de dimension n.

Solution. On définit $\bullet\colon \mathbb{R} \times T_xU \to T_xU$ par $\lambda[\alpha] := \lambda \bullet [\alpha] := L_\varphi^{-1}(\lambda L_\varphi[\alpha])$. Le fait que la définition ne dépend pas de φ est comme ci-haut.

On laisse la vérification que cela forme un espace vectoriel en exercice. Pour voir qu'il est dimension n, il suffit de constater que L_φ est une application linéaire inversible.

g) Soit $b = f(a)$. Montrer que f induit une application linéaire $A\colon T_xU \to T_b\mathbb{R}$. On l'appelle la *différentielle* de f en x et on la note $f_{*,x}$ ou $\mathrm{d}f_x$.

Solution. On définit A par $A[\alpha] := (f \circ \alpha)'(0)$. On note que $T_b\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ puisque chaque classe d'équivalence $[\beta]$ de courbes telles que $\beta(0) = b$ et $\beta'(0)$ existe est identifiée au nombre $\beta'(0) \in \mathbb{R}$, donc A est en fait définie de $T_xU \to \mathbb{R}$, mais cela n'a pas d'importance.

Remarques. 1. Cet exercice est à la base de la géométrie différentielle. Le fait que l'on puisse définir la dérivée à partir de la composition de fonction permet détendre cette notion à des espaces dépourvu de structure d'espace vectoriel.

2. Habituellement, on définirait une notion d'*atlas* sur U plutôt que de parler d'homéomorphisme local. La notion de carte viendrait s'y ajouter naturellement. Le numéro est écrit ainsi pour limiter la quantité de notion à définir inutilement.

3. Enfin, à noter qu'on peut remplacer l'espace métrique (X, d) par un espace topologique (X, τ).