Analyse 3

Série 6

Dérivation des fonctions de plusieurs variables

Exercice 1. Soit $(X, \|\cdot\|')$ un espace vectoriel normé tel que $\dim X = n \in \mathbb{N}$ et soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une base de X. Construire une bijection $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to X$ et une norme $\|\cdot\|''$ sur $\mathbb{R}^n$ telles que

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y) \qquad \text{et} \qquad \|\varphi(x)\|' = \|x\|''$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. On définit $\|\cdot\|'\colon M_{m\times n} \to [0, \infty]$ par $\|A\|' = \sup\limits_{x\in S} \|Ax\|$, où $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$.

a) Montrer que $\|\cdot\|'$ est une norme sur $M_{m\times n}$.

b) Montrer que $\|Ax\| \leq \|A\|'\|x\|$ pour toute $A \in M_{m\times n}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$.

c) Montrer que $\|AB\|' \leq \|A\|'\|B\|'$ pour toute $A \in M_{m\times n}$ et toute $B \in M_{n\times p}$.

Exercice 3. Une matrice $B \in M_n$ est dite *orthogonale* si $AA^T = A^TA = I$. La *trace* d'une matrice $A \in M_n$ est le nombre $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n A_{ii}$. Soit $Q \in M_n$ orthogonale et soit $A \in M_{m\times n}$.

a) Montrer que $\|A\| = \|A^T\|$.

b) Montrer que $\|A\| = \operatorname{tr}(A^TA)^{1/2}$.

c) Montrer que $\|AQ\| = \|A\|$.

d) Montrer que $\|Q\| = \sqrt{n}$.

Exercice 4. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ une fonction et $a \in U$ un point. Montrer que si f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est unique.

Exercice 5. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. Montrer que si $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ est constante, alors $f'(a) = 0$ pour tout $a \in U$.

Exercice 6. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie par $f(x) = Ax + b$, où $A \in M_{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

a) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, calculer $f'(a)$.

b) On pose $g(a) := f'(a)$. C'est une fonction de $U \to M_{m\times n}$. Calculer $g'(a)$. Quelle est la dimension de la matrice qui représente $g'(a)$ comme application linéaire?

Exercice 7. On fixe $A \in M_n$. Soit $f\colon M_{m\times n} \to M_m$ définie par $f(X) = XAX^T$. Pour $B \in M_{m\times n}$, montrer que f est dérivable en B et calculer $f'(B)$.

Exercice 8. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f_n\colon U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, des fonctions. Montrer que $f := \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ est dérivable en $a \in U$ si et seulement si f_i est dérivable en $a \in U$ pour chaque i.

Exercice 9. Règle de Leibniz (ou règle du produit). Une application $\bullet\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^k$ est dite *bilinéaire* si pour tout $x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, pour tout $y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^\ell$ et pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, on a

$$x \bullet (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1(x \bullet y_1) + \alpha_2(x \bullet y_2)$$
$$\text{et} \quad (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \bullet y = \alpha_1(x_1 \bullet y) + \alpha_2(x_2 \bullet y).$$

a) Vérifier que les applications suivantes sont bilinéaires.
   i) Le produit usuel sur $\mathbb{R}$.
   ii) Le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.
   iii) Le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$.
   iv) Le produit matriciel de $M_{m\times n} \times M_{n\times p}$ dans $M_{m\times p}$.

Soit $\bullet\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^k$ une application bilinéaire et soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ et $g\colon U \to \mathbb{R}^\ell$ des fonctions dérivables en $a \in U$.

b) Montrer qu'il existe M telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ et tout $y \in \mathbb{R}^\ell$, on a $\|x \bullet y\| \le M\|x\|\|y\|$.

c) Déduire que $f \bullet g\colon U \to \mathbb{R}^k$ est dérivable en a et que

$$(f \bullet g)'(a)h = f'(a)h \bullet g(a) + f(a) \bullet g'(a)h$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 10. Utiliser l'exercice précédent pour calculer la dérivée de $f\colon M_n \to M_n$; $X \mapsto X^3$ en $A \in M_n$.

Exercice 11. a) Soit $X \in M_n$ une matrice telle que $\|X\| < 1$. Montrer que $I - X$ est inversible, où I est la matrice identité.
Suggestion. Inspirez-vous des séries géométriques et de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

b) Montrer que si $X \in M_n^{-1}$, alors $B\big(X, \frac{1}{\|X^{-1}\|}\big) \subseteq M_n^{-1}$. En déduire que M_n^{-1} est ouvert.

c) On définit $F\colon M_n^{-1} \to M_n^{-1}$ par $F(X) = X^{-1}$. Montrer que F est dérivable en chaque $A \in M_n^{-1}$ et que $F'(A)$ est l'application linéaire $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.
Suggestion. Utilisez le fait que $(A + H)^{-1} = A^{-1}(I + HA^{-1})^{-1}$ et la partie a0 avec $X = -HA^{-1}$.

Exercice 12. Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x) = \binom{2x_2 + x_1 \cos 1x_3}{x_2 \sin x_1}$. Montrer que f est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}^3$ et calculer $f'(a)$.

Exercice 13. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, si $(x, y) \neq 0$ et 0 sinon.

a) Montrer que f est continue.

b) Soit $\varphi: [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ dérivable en 0 et telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) \neq (0, 0)$. Montrer que $f \circ \varphi$ est dérivable est en 0 et calculer $(f \circ \varphi)'(0)$.

c) Montrer que $f_x(0)$ et $f_y(0)$ existent et les calculer.

d) Montrer que f n'est pas dérivable en $(0, 0)$.

Exercice 14. Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(u, v) = (u, ve^u, ue^v) \qquad \text{et} \qquad g(x, y, z) = xz + yz + x.$$

On pose $h := g \circ f$. Calculer $h'(1, 0)$.

Exercice 15. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\|f(x)\| = 1$. Montrer que $f(x)^T f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 16. Pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x(r, \theta) = r \cos \theta$ et $y(r, \theta) = r \sin \theta$, les coordonnées polaires.

a) Montrer que $z(r, \theta) := \binom{x(r\theta)}{y(r\theta)}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer $z'(r, \theta)$.

b) Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $g(r, \theta) = f\big(x(r, \theta), y(r, \theta)\big)$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 17. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in U$. Calculer $\nabla\big(\frac{1}{f}\big)(a)$ si $f(a) \neq 0$.

Exercice 18. Dérivée directionnelle. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in U$. Pour chaque vecteur unitaire $u \in \mathbb{R}^n$, on définit la *dérivée directionnelle* de f en a dans la reiction u par $D_u f(a) = (f \circ \gamma)'(0)$, où $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ est définie par $\gamma(t) = a + tu$.

a) Montrer que $D_u f(a) = \nabla f(a) u$.

b) Montrer que $D_{e_j} f(a) = f_{x_j}(a)$.

c) Montrer que $-\|\nabla f(a)\| \leq D_u f(a) \leq \|\nabla f(a)\|$ pour tout u.

d) Montrer que si $\nabla f(a) \neq 0$, alors on a $D_v f(a) = \|\nabla f(a)\|$ et $D_{-v} f(a) = -\|\nabla f(a)\|$, où $v = \frac{\nabla f(a)^T}{\|\nabla f(a)\|}$.

Exercice 19. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit $a, b \in U$ tels que $[a,b] \subseteq U$.

a) Montrer que si $\|f'(x)\| \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, alors

$$|f(b) - f(a) - \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} f(a)(b_j - a_j)| \leq 2M\|b-a\|.$$

b) Montrer que si f est de classe C^1, alors on a

$$|f(b) - f(a)| \leq R\|b-a\|,$$

où $R = \sum\limits_j \sup_{[a,b]} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|$.

c) Encore sous l'hypothèse que f est de classe C^1, montrer que

$$|f(b) - f(a) - \textstyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} f(a)(b_j - a_j)| \leq \|b-a\| \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \sup_{x\in[a,b]} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\right|.$$

Exercice 20. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ une fonction $a, b \in U$ des points. Soit γ une courbe de classe C^1 dans U joignant a à b, c'est-à-dire que $\gamma\colon [0,1] \to U$ est continûment dérivable et $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$. Montrer que si f est dérivable en chaque point de γ, si $\|f'\big(\gamma(t)\big)\| \leq M$ pour tout t et si $(f \circ \gamma)'$ est continue, alors on a $\|f(b) - f(a)\| \leq ML(\gamma)$, où $L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| \mathrm{d}t$ (la longueur de γ).
Suggestion. Inspirez-vous de la démonstration du théorème de la moyenne et de la solution de l'exercice précédent.

Exercice 21. Soit $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(\|x\|)$. Montrer que $|f(x) - f(y)| \leq \|x-y\|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$. (Attention, f n'est pas dérivable en 0.)

Exercice 22†. Partition de l'unité. Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un compact et soit $U_1, \ldots, U_n \subseteq \mathbb{R}^n$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $K \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$.

a) Montrer qu'il existe une fonction $\psi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ de classe C^1 telle que $\psi(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $\psi(x) = 1$ si $x \geq 1$.

b) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $K \subset U$ un compact. Montrer qu'il existe $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ telle que $\varphi(x) = 1$ sur un voisinage de K et $\varphi(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus U$.
Indice. Si $x \in K$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, 2r) \subseteq U$. Recouvrez K par de telles boules et considérez la fonction $y \mapsto \psi\left(3 - \frac{\|y-x\|^2}{r^2}\right)$.

c) Montrer qu'il existe $\psi_1, \ldots, \psi_n\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ telles que

i) $\psi_j(x) = 0$ sur $\mathbb{R}^n \setminus U_j$;

ii) $\sum_{j=1}^{n} \psi_j(x) = 1$ sur un voisinage de K.
Indice. Commencez par montrer qu'il existe des compact $K_1, \cdots, K_n$ tels que $K_j \subseteq U_j$ et $K \subseteq K_1^\circ \cup \cdots \cup K_n^\circ$.

d)†† Refaire le numéro en remplaçant C^1 par C^∞.

e) Montrer qu'il existe une infinité de fonctions de $[0, \infty) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ qui, en chaque naturel n, vaut $n!$.

Exercice 23. Soit $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ des ouverts non vide et $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. Montrer que si pour toute $\varphi\colon V \to U$ dérivable, on a $f \circ \varphi$ dérivable, alors f est dérivable.
Indice. Utilisez la partie b) du numéro précédent pour construire une bonne φ dans un voisinage de $a \in V$.

Exercice 24. Espace tangent. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $U \subseteq X$ un ouvert. On suppose que pour tout $x \in U$, il existe un homéomophisme φ_x local en x vers $\mathbb{R}^n$ (il existe U' un voisinage de x, V un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \colon U' \to V$ un homéomorphisme tel que $\varphi(x) = 0$) tel que $\varphi_x \circ \varphi_b^{-1}$ est dérivable là où la composition est possible avec une dérivée inversible. On dit que ψ est une *carte* en x si ψ est un homéomorphisme local en x vers $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $b \in U$, $\psi \circ \varphi_b^{-1}$ est dérivable là où la composition est possible. Soit $f \colon U \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède la propriété suivante : pour toute carte ψ en $a \in U$, la composée $f \circ \psi^{-1}$ est dérivable en 0.

a) Montrer que si $X = \mathbb{R}^n$ et si U est muni des homéomorphismes $T_x \colon h \mapsto h - x$, alors f est dérivable en a.

Ceci motive la définition suivante : on dit que f est *dérivable* en a si elle est telle que dans l'énoncé. Pour le reste u problème, on suppose que f est dérivable au sens de l'énoncé.

b) On suppose maintenant que (X, d) est un espace métrique quelconque. Soit $\varepsilon > 0$ et $\gamma \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ une courbe telle que $\gamma(0) = a$. On dit que γ est dérivable en 0 si $\varphi \circ \gamma$ est derivable en 0 pour toute carte φ en a. Montrer que $f \circ \gamma$ est dérivable en 0.

c) Soit φ et ψ deux cartes en a. Montrer que si γ_1, γ_2 sont deux courbes dérivables en 0 telles que $(\varphi \circ \gamma_1)'(0) = (\varphi \circ \gamma_2)'(0)$, alors on a $(\psi \circ \gamma_1)'(0) = (\psi \circ \gamma_2)'(0)$. Montrer que ceci définit une relation d'équivalence $\sim$ sur les courbes $\gamma \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ dérivable en 0 avec $\gamma(0) = a$.

d) On note les classes d'équivalence par $[\gamma]$. On pose

$$T_x U := \{[\gamma] : \gamma(0) = a \text{ et } \gamma \text{ est dérivable en } 0\}.$$

On appelle $T_x U$ l'*espace tangent* de U en x. Montrer que si φ est une carte en a, alors φ induit une application $L_\varphi \colon T_x U \to \mathbb{R}^n$ bijective.

e) On définit $+ \colon T_x U \times T_x U \to T_x U$ par $[\alpha] + [\beta] = L_\varphi^{-1}(L_\varphi([\alpha]) + L_\varphi([\beta]))$. Montrer que si ψ est une autre carte en a, alors L_ψ définit la même loi de composition interne $+$. Autrement dit, la définition de $+$ ne dépend pas du choix de carte.

f) Définir la multiplication par une scalaire comme au e) et montrer que cette définition ne dépend pas du choix de carte. Montrer que $T_x U$ muni de $+$ et de la multiplication par un scalaire forme un espace vectoriel de dimension n.

g) Soit $b = f(a)$. Montrer que f induit une application linéaire $A \colon T_x U \to T_b \mathbb{R}$. On l'appelle la *différentielle* de f en x et on la note $f_{*,x}$ ou $\mathrm{d}f_x$.

Remarques. 1. Cet exercice est à la base de la géométrie différentielle. Le fait que l'on puisse définir la dérivée à partir de la composition de fonction permet détendre cette notion à des espaces dépourvu de structure d'espace vectoriel.

2. Habituellement, on définirait une notion d'*atlas* sur U plutôt que de parler d'homéomorphisme local. La notion de carte viendrait s'y ajouter naturellement. Le numéro est écrit ainsi pour limiter la quantité de notion à définir inutilement.

3. Enfin, à noter qu'on peut remplacer l'espace métrique (X, d) par un espace topologique (X, τ).