Analyse 3

Série 5

Complétude

Exercice 1. Soit $X = [0, 1)$.

a) Montrer que X muni de la métrique euclidienne n'est pas complet.

b) On pose $d(x, y) = \left|\frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y}\right|$. Montrer que d est une métrique sur X équivalente à la métrique euclidienne.

c) Montrer que (X, d) est complet.

Exercice 2. Soit $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$. Est-ce que $(\mathbb{R}, d)$ forme un espace métrique complet?

Exercice 3. Donner un exemple d'une fonction $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$ et d'une suite de Cauchy (x_n) de $(0, 1)$ telles que $\big(f(x_n)\big)$ n'est pas une suite de Cauchy.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique (pas nécessairement complet) et $F \subseteq X$ complet. Montrer que F est complet.

Exercice 5. Soit (X, d) et (Y, d') des espaces métriques et soit $f\colon X \to Y$ un homéomorphisme uniforme. Montrer que X est complet si et seulement si Y est complet.

Exercice 6. Théorème de Borel-Lebesgue. Soit (X, d) un espace métrique et soit $K \subseteq X$ un sous-ensemble. Les énoncés suivants sont équivalents :

i) K est compact;

ii) K possède la propriété de Bolzano-Weierstrass;

iii) K est totalement borné et complet.

Un exerice de la série 3 montre déjà que *i*) et *ii*) sont équivalents et que *ii*) implique que K est totalement borné. Montrer que *i*) $\Rightarrow$ *iii*) et que *iii*) $\Rightarrow$ *ii*).
Suggestion pour iii) $\Rightarrow$ *ii*). Soit (x_n) une suite dans K. On construit une suit (B_k) de boules de rayons $\frac{1}{k}$ et une suite strictement croissantes d'entiers n_k tels que $|B_k \cap \cdots \cap B_1 \cap \{x_n\}_n| = \infty$ et $x_{n_k} \in B_k \cap \cdots \cap B_1$.

Exercice 7. Soit (X, d) une espace métrique et soit (x_n) et (y_n) des suites de Cauchy dans X. Montrer que la suite $\big(d(x_n, y_n)\big)$ converge dans $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Soit (X,d) un espace métrique. Il existe un espace métrique complet (X^*,d^*) et une isométrie $\varphi\colon X \to X^*$ telle que $\varphi(X)$ est dense dans X^*. On appelle X^* la *complétion* de X. Grâce à l'isométrie φ, on peut voir X comme un sous-espace métrique X^*.

Montrer que cela en suivants les étapes ci-après. On note par les lettres grasses, les suites. Par exemple, $\boldsymbol{x}$ est la suite (x_n).

a) Soit $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ deux suites de Cauchy de X. On définit la relation d'équivalence $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = 0$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalente. Lorsque $\boldsymbol{x} \sim \boldsymbol{y}$, on dit que ces suites sont équivalentes.

b) Soit X^* l'ensemble des classes d'équivalence de cette relation. Soit $\boldsymbol{x}$, $\tilde{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{y}$ et $\tilde{\boldsymbol{y}}$ des suites de Cauchy de X telles que $\boldsymbol{x} \sim \tilde{\boldsymbol{x}}$ et $\boldsymbol{y} \sim \tilde{\boldsymbol{y}}$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} d(\tilde{x}_n,\tilde{y}_n).$$

c) la fonction $d^*\big([\boldsymbol{x}],[\boldsymbol{y}]\big) := \lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$ sur $X^* \times X^*$ est bien définie par le b). Montrer que d^* est une métrique sur X^*.

d) Montrer que (X^*,d^*) est complet.
Suggestion. Montrer que si $\big([\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}]\big)$ est une suite de Cauchy de X^*, alors il existe des $m_k \in \mathbb{N}$ tels que $d(x_n^k,x_m^k) < \frac{1}{k}$ si $n \geq m_k$, $\boldsymbol{y} := (x_{m_k}^k)$ est une suite de Cauchy de X et $[\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}] \xrightarrow{d^*} [\boldsymbol{y}]$.

e) On définit $\varphi\colon X \to X^*$ par $\varphi(x) = [(x,x,x,\ldots)]$. Montrer que φ est une isométrique.

f) Montrer que $\varphi(X)$ est dense dans X^*.

g) Montrer que X est complet si et seulement si $\varphi(X) = X^*$.

Exercice 9. Soit (X,d) et (Y,d) deux espaces métriques et soit $f\colon X \to Y$ une fonction.

a) Montrer que si f est uniformément continue, alors pour chaque suite de Cauchy (x_n) de X, on a que $\big(f(x_n)\big)$ est une suite de Cauchy de Y.

b) Montrer que si pour chaque suite de Cauchy (x_n) de X, $\big(f(x_n)\big)$ est une suite de Cauchy de Y et si X est compact, alors f est uniformément continue.

c) Montrer que si pour chaque suite de Cauchy (x_n) de X, $\big(f(x_n)\big)$ est une suite de Cauchy de Y et si Y est complet, alors f est continue.

d) Montrer que si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, Y est complet et si pour chaque suite de Cauchy (x_n) de X, $\big(f(x_n)\big)$ est une suite de Cauchy de Y, alors f est uniformément continue.

e) Montrer que la réciproque de a) est fausse.

Exercice 10. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable. On pose $M := \sup\limits_{\mathbb{R}} |f'(x)|$.

a) Montrer que si $M < 1$, alors f possède un point fixe.

b) Montrer que si $M = 1$, alors f pourrait ne pas avoir de point fixe.

Exercice 11. a) Montrer que $f(x) = e^{-x}$ est une contraction de l'intervalle $[-\frac{1}{3}, 1]$ dans lui-même.

a) Montrer que l'équation $xe^x = 1$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$.

b) Utiliser le principe de contraction (et la calculatrice) pour trouver une approximation de cette solution avec une erreur d'au plus $\frac{1}{100}$.

Exercice 12. Soit $f(x) = 1 - x^5$ sur l'intervalle $I = [0, 1]$.

a) Montrer que $f(I) = I$.

b) Montrer que f possède un unique point fixe dans I.

c) On pose $x_0 = 1$ et $x_n = f(x_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N}$. Calculer la limite de x_n lorsque $n \to \infty$.

d) Que peut-on déduire pour f du principe de contraction?

Exercice 13. Soit $I = [1, \infty)$ et $f\colon I \to I$ la fonction donnée par $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Puisque f satisfait $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ pour tout x différent de y, le principe de contraction montre qu'il existe $z \in I$ tel que $z = z + \frac{1}{z}$. Quelle est l'erreur dans ce raisonnement?

Exercice 14. Soit (X, d) un espace métrique compact et soit $T\colon X \to X$ une application telle que $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$. Montrer que T possède un unique point fixe.
Suggestion. Considérez la fonction $g(x) = d(x, Tx)$.

Exercice 15. Théorème de Cauchy-Lipschitz global. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $f\colon I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que f est *Lipschitz par rapport à la deuxième variable* (ou Lipschitz par rapport à y si les variables sont $(x, y) \in I \times \mathbb{R}$) s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $(x, y), (x, z) \in I \times \mathbb{R}$, on a

$$|f(x, y) - f(x, z)| \leq M|y - z|.$$

On suppose que pour tout $K \subseteq I$ compact, f est Lipschitz sur $K \times \mathbb{R}$ par rapport à la deuxième variable. Soit l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ et soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Soit $(x_0, y_0) \in K \subseteq I$ un intervalle compact et M la constante de Lipschitz pour ce compact.

a) Pour $g \in C(K)$, on pose $\|g\| = \sup_{x \in I} e^{-M|x - x_0|}|g(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $C(K)$ et que $\big(C(K), \|\cdot\|\big)$ forme un espace normé complet.

b) On définit $F\colon C(K) \to C(K)$ par $(Fg)(x) = \int_{x_0}^{x} f\big(t, g(t)\big)\mathrm{d}t$. Montrer que

$$\|Fg - Fh\| \leq (1 - e^{M\ell})\|g - h\|,$$

où ℓ est la longueur de K.

c) Déduire qu'il existe $y \in C(K)$ telle que $F(y) = y$. Montrer que y est contiûment dérivable et qu'elle est une solution de l'équation différentielle vérifiant $y(x_0) = y_0$.

d) Montrer qu'il existe une fonction y^* définie sur I, solution de l'équation différentielle et vérifiant $y^*(x_0) = y_0$.

Remarque. Il y a des versions plus générales du théorème. Par exemple, on peut supposer que f est *localement* Lipschitz en y et on obtient alors l'existence d'une unique solution sur un intervalle maximal ouvert $J \subseteq I$. Puisque toute fonction continûment dérivable est localement Lipschitz, l'existence et l'unicité est alors vérifiés pour une classe importante de fonction.

Exercice 16. On considère sur l'intervalle $[0, 2]$ l'équation différentielle $y' = x + y$ avec condition intiale $y(0) = 1$.

a) Vérifier que l'hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz global.

b) Soit $T: C[0, 2] \to C[0, 2]$ l'application $(Tf)(x) = 1 + \int_0^x (t + f(t))\mathrm{d}t$. Trouver une valeur $N \in \mathbb{N}$ pour laquelle T^N est contractante sur $C[0, 2]$.

c) On pose $f_0 = 1$ et $f_n = Tf_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Trouver une formule explicite pour f_n.

d) Calculer $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.

e) Vérifier que $y := f$ est une solution de l'équation différentielle.

Exercices supplémentaires

Cette section est optionnelle.

Exercice 17. Soit (X, d) un espace métrique et soit $A, B \subseteq X$ des compacts.

a) Montrer que si $A \subseteq B$, alors pour tout $x \in X$, on a $d(x, B) \leq d(x, A)$.

b) Montrer que si $B \subseteq C$, alors $d(A, C) \leq d(A, B)$.

c) Montrer que $d(A \cup B, C) = \max\{d(A, C), d(A, B)\}$.

d) Montrer que $d_{\mathcal{H}}(A \cup B, C \cup D) \leq \max\{d_{\mathcal{H}}(A, C), d_{\mathcal{H}}(B, D)\}$. (Voir la série 3, numéro 23 pour la définition de $d_{\mathcal{H}}$.)

Exercice 18. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $f_1, \ldots, f_n: X \to X$ des applications contractantes ayant respectivement $k_1, \ldots, k_n$ comme facteur de contraction. On définit $F: \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ par

$$F(A) = f_1(A) \cup \cdots \cup f_n(A).$$

Montrer que F est bien définie et que c'est une contraction dont le facteur de contraction est $k = \max\{k_1, \ldots, k_n\}$ sur $(\mathcal{C}(X), d_{\mathcal{H}})$. (Voir la série 3, numéro 23 pour la définition de $d_{\mathcal{H}}$ et $\mathcal{C}(X)$.)

Exercice 19. Soit (X, d) un espace métrique. Soit (A_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{C}(X)$. On suppose qu'il existe (x_{n_j}) une suite de Cauchy de X telle que $x_{n_j} \in A_{n_j}$. Montrer qu'il existe une suite de Cauchy (y_n) dans X telle que $y_{n_j} = x_{n_j}$ et $y_n \in A_n$.
Indice. Montrer que pour chaque $n \in \{n_j + 1, \ldots, n_{j+1}\}$, l'ensemble $\{x \in A_n \mid d(x, x_{n_j}) = d_(x_{n_j}, A_n)\}$ est non vide et choisir y_n dans cette ensemble.

Exercice 20. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que si (X, d) est complet, alors $(\mathcal{C}(X), d_{\mathcal{H}})$ est complet en suivant ces étapes. Soit (A_n) une suite de Cauchy de $\mathcal{C}(X)$. On définit

$$A = \{x \in X \mid \text{il existe une suite de Cauchy } (x_n) \text{ telle que } x_n \in A_n \text{ et } x_n \to x\}.$$

Le but est de montrer que $A \in \mathcal{C}(X)$ et que $A_n \xrightarrow{d_{\mathcal{H}}} A$.

a) Montrer que A est non vide.
Indice. Puisque (A_n) est une suite de Cauchy, il existe $N_j \in \mathbb{N}$ telle que $N_j < N_{j+1}$ et $d_{\mathcal{H}}(A_n, A_m) < \frac{1}{2^j}$ lorsque $n, m \geq N_j$. Construisez une suite (x_{N_j}) telle que $x_{N_j} \in A_{N_j}$ et $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) \leq 2^{-j}$. Utilisez l'exercice précédent.

b) Montrer que A est fermé.

c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $A \subseteq A_{n,\varepsilon}$ (l'épaississement de A_n par ε, voir la série 3, section des exercices supplémentaires).

d) Montrer que A est totalement borné et en déduire que A est compact.

e) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $A_n \subseteq A_\varepsilon$. En déduire que $A_n \xrightarrow{d_{\mathcal{H}}} A$.
Démarche. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer d'abord que si $n, m \geq N$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors $A_m \subseteq A_{n,\frac{\varepsilon}{2}}$. Ensuite, il faut montrer que pour $n \geq N$, on a bien $A_n \subseteq A_\varepsilon$. Soit $y \in A$. Montrer qu'il existe une suite (x_{N_j}) telle que $N_j \geq N$, $x_{N_j} \in A_{N_j}$ et $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Montrer que cette suite converge vers, disons, $x \in A_\varepsilon$ et donc que $d(x, y) \leq \varepsilon$.