Analyse 3

Série 4

Connexité

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique et $E \subseteq X$.

a) Montrer que E n'est pas connexe (disconnexe) si seulement s'il existe U, V ouverts de X tels que $U \cap E \neq \emptyset$, $V \cap E \neq \emptyset$, $U \cap V \cap E = \emptyset$ et $E \subseteq U \cup V$.

b) Montrer que E n'est pas connexe (disconnexe) si seulement s'il existe U, V ouverts disjoints de X tels que $U \cap E \neq \emptyset$, $V \cap E \neq \emptyset$, $U \cap V \cap E = \emptyset$ et $E \subseteq U \cup V$.
Suggestion. Si U' et V' sont des ouverts disjoints et non vides de E tels que $E = U' \cup V'$, alors on pose $U = \bigcup_{u \in U'} B\left(u, \frac{1}{2}\operatorname{dist}(u, V')\right)$.

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique et $A, B \subseteq X$ des sous-ensembles. On dit que A et B sont séparés si $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \emptyset$. Montrer que $E \subseteq X$ est connexe si et seulement s'il n'est pas l'union de deux ensembles séparés non vides.

Exercice 3. Soit E un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}^2$ contenant au moins points distincts p, q. Montrer que pour tout $\delta > 0$ tel que $0 < \delta < d_2(p, q)$, il existe $x \in E$ pour lequel $d_2(x, p) = \delta$.

Exercice 4. Montrer que si (X, d) est un espace métrique connexe contenant plus d'un point, alors X est infini non dénombrable.

Exercice 5. Soit $C[0, 1]$ et soit $M > 0$. On pose

$$E = \left\{ \int_0^1 f \;\middle|\; f \in C[0, 1],\ 0 \leq f \leq M \text{ et } f(0) = f(1) = 0 \right\}.$$

a) Montrer que E est connexe.

b) Trouver l'intervalle qui correspond à E.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique et soit $Y = \{0, 1\}$ muni de la métrique discrète. Montrer que X est connexe si et seulement si toute fonction continue $f \colon X \to Y$ est constante.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique et soit $\{E_i\}_{i \in I}$ une collection de sous-ensembles connexes de X.

a) Montrer que $\bigcap_{i \in I} E_i$ n'est pas nécessairement connexe.

b) Montrer que $\bigcup_{i \in I} E_i$ n'est pas nécessairement connexe.

c) Montrer que si $E_i \cap E_j \neq \emptyset$ pour tout $i, j \in I$, alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ est connexe.
Suggestion. Utilisez l'exercice 6.

Exercice 8. Soit (X,d) un espace métrique connexe et soit $f\colon X \to \mathbb{Q}$ une fonction continue. Que peut-on dire de f?

Exercice 9. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui possède la *propriété des valeurs intermédiaires* : pour tout $x < y$ et tout c entre $f(x)$ et $f(y)$, il existe $z \in (x,y)$ tel que $f(z) = c$. Est-ce que f est nécessairement continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10. Composantes connexes. Soit (X,d) un espace métrique et $E \subseteq X$ un sous-ensemble non vide. On définit sur E la relation d'équivalence $x \sim y$ si et seulement si il existe $C \subseteq E$ connexe tel que $x, y \in C$. Les classes d'équivalence de $\sim$ sont appelés les *composantes connexes* de E. On dit que E est *totalement disconnexe* si chacune de ses composantes connexes est un singleton.

a) Montrer que $\sim$ est effectivement une relation d'équivalence.

b) Montrer qu'une composante connexe de E est connexe.

c) Montrer qu'une composante connexe C de E est maximale : si C' est connexe et si $C \subseteq C' \subseteq E$, alors $C = C'$.

d) Montrer que E non vide est connexe si seulement s'il possède une seule composante connexe.

e) Soit $x \in E$ un point et C la composante connexe connexe contenant x. Montrer que

$$C = \bigcup_{\substack{x \in F \subseteq E \\ F \text{ connexe}}} F.$$

f) Montrer que $\mathbb{Q}$ est totalement disconnexe.

g) Montrer que l'ensemble de Cantor est talement disconnexe.

Exercice 11. Soit (X,d) et (Y,d') des espaces métriques. Montrer que $(X \times Y, d_1)$ est connexe si et seulement si X et Y sont connexes, où $d_1\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = d(x_1,x_2) + d'(y_1,y_2)$.
Suggestion. Pour la réciproque, utilisez l'exercice 6.

Exercice 12. Soit (X,d) et (Y,d') des espaces métriques et $f\colon X \to Y$ une fonction continue. Montrer que si X est connexe, alors $G = \big\{\big(x, f(x)\big) \mid x \in X\big\}$ est connexe dans $(X \times Y, d_2)$, où $d_2\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \Big\|\Big(d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\Big)\Big\|_2$.
Suggestion. Trouvez une fonction continue sur X pour laquelle G est son image.

Exercice 13. Pour chacun des sous-ensembles suivantes de $\mathbb{R}^2$, déterminer s'il est connexe, connexe par arcs, les deux ou ni l'un ni l'autre.

a) $E = B\big((0,0),1\big) \setminus \big\{\big(\frac{1}{2n},0\big) \mid n \in \mathbb{N}\big\}$

b) $E = \{(x,y) \mid 1 < x^2+y^2 < 2\}$

c) $E = \{(x,0) \mid x > 0\} \cup \big\{\big(x,\frac{1}{x}\big) \mid x > 0\big\}$

d) $E = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R}\}$

e) $E = \big\{(x,y) \mid 0 < x < 1,\ \frac{y}{x} \in \mathbb{N}\big\}$

f)† $E = (0,1]\times\{0\} \quad \cup \quad \{0\}\times(0,1) \quad \cup \quad \big\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\big\}\times(0,1)$

Exercice 14. Soit $k \geq 2$ un entier.

a) Montrer que $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ est connexe.

b) Déduire de a) que $S^{k-1} := \{x \in \mathbb{R} \mid d_2(x,0) = 1\}$ est connexe.

c) Déduire de a) que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphe.

Exercice 15. Soit (X,d) un espace métrique et $E \subseteq X$ un sous-ensemble connexe.

a) Montrer que $\overline{E}$ est connexe.

b) Montrer que E° n'est pas nécessairement connexe.

Exercice 16. Soit $x,y \in \mathbb{R}^k$. On définit $[x,y] = \{(1-t)x+ty \mid t \in [0,1]\}$, le segment de droite joigant x à y. Soit $E \subseteq \mathbb{R}^k$ connexe.

a) Montrer que si E est ouvert, alors pour tout $x,y \in E$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0,\ldots,x_n \in E$ tels que $x_0 = x$, $x_n = y$ et $[x_{j-1},x_j] \subseteq E$, $j = 1,\ldots,n$.
Suggestion. Considérez la relation d'équivalence définie sur E par $x \sim y$ ssi la conclusion est vraie pour x,y.

b) Déduire que dans ce cas, E est connexe par arc.

Cela montre qu'un ouvert de $\mathbb{R}^k$ est connexe $\Leftrightarrow$ il est connexe par arcs $\Leftrightarrow$ il est connexe par arcs polygonaux.

Exercice 17. On pose

$$S := \big\{\big(x,\sin\tfrac{1}{x}\big)\big|0 < x \leq 1\big\} \qquad \text{et} \qquad D := \{(0,y) \mid -1 \leq y \leq 1\}.$$

La *sinusoïde du topologiste* est l'ensemble $C = S \cup D$.

a) Montrer que $\overline{S} = C$.

b) Déduire que C est connexe.

c) Montrer que C n'est pas connexe par arcs à l'aide des étapes suivantes.

   i) Supposer qu'il existe un arc $\gamma\colon [0,1] \to C$ joignant $(0,0)$ à $(1, \sin 1)$ et poser
   $$t_0 = \sup\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in D\}.$$
   Montrer qu'il existe $y_0 \in [-1,1]$ tel que $\gamma(t_0) = (0, y_0) \in D$.

   ii) Trouver $t_1 \in (t_0, 1]$ tel que $d_2(\gamma(t_0), \gamma(t)) < \frac{1}{2}$ pour tout $t \in [t_0, t_1] =: I$.

   iii) Soit $(x_1, y_1) := \gamma(t_1)$. Montrer que $\left\{\left(x, \sin \frac{1}{x}\right) \mid 0 < x < x_1\right\} \subseteq \gamma(I)$.

   iv) Obtenir une contradiction et conclure.

Exercices supplémentaires

Cette section est optionnelle.

Exercice 18. Soit $(V, \|\cdot\|)$ un espace normé.

a) Montrer que tout ouvert de V est locallement connexe.

b) Montrer que tout sous-ensemble convexe de V est locallement connexe.

Exercice 19. Montrer que la sinusoïde du topologiste C (voir l'exercice 17) n'est pas locallement connexe à partir de ces étapes.

a) Soit $x = (0, y)$, où $y \in (-1, 1)$. Montrer que pour tout $0 < r < \frac{1}{2}$, la boule $B(x, r)$ dans C n'est pas connexe.

b) Montrer que $L = \{0\} \times (y - r, y + r)$ n'est pas ouvert dans C.

c) Montrer que si U est un ouvert contenu dans $B(x, r)$ tel que $x \in U$, alors U n'est pas connexe. Déduire que C n'est pas locallement connexe.

Exercice 20. Soit (X, d) un espace métrique et soit $U \subseteq X$ un sous-ensemble. Montrer que si U est ouvert, connexe et locallement connexe par arcs, alors U est connexe par arcs.
Suggestion. Essayez d'adapter l'idée de l'exercice 16.