Analyse 3

Série 3 (solutionnaire partiel)

Compacité

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique compact et discret. Montrer que X est fini.

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique et soit (x_n) une suite dans X telle que $x_n \to x \in X$. Montrer que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Solution. Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $E := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Puisque U_{i_0} est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq U_{i_0}$. Puisque $x_n \to x$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, alors $d(x_n, x) < r$. Ainsi, pour chaque $1 \leq k < N$, il existe i_k tel que $x_k \in U_{i_k}$. On a le sous-recouvrement fini $U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_{N-1}}$.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique, $K \subseteq X$ un compact et $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de K. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ pour lequel $B(x, \delta) \subseteq U_i$. (Un tel δ est appelé une *constante de Lebesque* pour K et $\{U_i\}_{i\in I}$.)

Solution. Pour chaque $x \in K$, il existe $i_x \in I$ et $r_x > 0$ tels que $B(x, 2r_x) \subseteq U_{i_x}$. Ainsi, l'ensemble $\{B(x, r_x)\}_{x\in K}$ est un recouvrement ouvert de K. Il existe donc un sous-recouvrement fini $\{B(x_j, r_{x_k})\}_{1\leq j\leq n}$. On pose $\delta = \min\limits_{1\leq j\leq n}\{r_{x_j}\}$. Pour chaque $x \in K$, il existe j tel que $x \in B(x_j, r_{x_j})$. Le choix de r_{x_j} et de δ fait en sorte que $B(x, \delta) \subseteq B(x_j, 2r_{x_j}) \subseteq U_{i_{x_j}}$.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique, U un ouvert de X et $K \subseteq U$ un compact non vide.

a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon := \{x \in X \mid \mathrm{dist}(x, K) \leq \varepsilon\} \subseteq U$.
Suggestion. Utilisez le 3. Voir la série 2 pour la définition de dist.

b) Montrer que si K est fermé mais non compact, alors il est possible que a) soit faux.

Solution. a) Par le numéro 3, il existe une constante de Lebesgue $\delta > 0$ pour le recouvrement $\{U\}$. On pose $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$. On montre que $K_\varepsilon \subseteq U$. Soit $x \in K_\varepsilon$. Si $x \in K$, alors $x \in B(x, \varepsilon) \subseteq U$. Si x n'est pas dans K, alors il existe $y \in K$ tel que $d(x, y) \leq \varepsilon$. Ainsi, on a $x \in B(y, \delta) \subseteq U$.

b) On prend $U = \{(x, y) \mid x > 0\}$. C'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Ensuite, on prend $K = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1, xy \leq 1\}$. C'est le graphe de la fonction $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Ainsi, K est fermé et non borné. De plus, on voit que $K_\varepsilon \not\subseteq U$ pour tout $\varepsilon > 0$, car $(x - \varepsilon, \frac{1}{y})$ est dans K_ε, mais on peut choisir x assez près de 0 de sorte que $\left(x - \varepsilon, \frac{1}{y}\right) \notin U$.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique, $F \subseteq X$ un fermé dans X et $K \subseteq X$ un compact tels que $F \cap K = \emptyset$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $d(x, y) \geq r$ pour tout $x \in F$ et tout $y \in K$.

Solution. On pose $U = F^c$. On a alors que $K \subseteq U$ et U est ouvert. Ainsi, par le numéro 4, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $y \in X$, s'il existe $x \in K$ tel que $d(x, y) \leq \varepsilon$, alors $y \in U$. Ainsi, pour $z \in F$, s'il existe $x \in K$ tel que $d(x, y) \leq \varepsilon$, on aura $z \in U$, ce qui est impossible. On a donc $d(x, z) > \varepsilon$ pour tout $x \in K$ et tout $z \in F$. On peut donc prendre $r = \frac{\varepsilon}{2}$ si on veut une inégalité non stricte.

Exercice 6. Montrer que si (X, d) est un espace métrique compact, alors il est *séparable* : il existe $E \subseteq X$ au plus dénombrable et dense dans X.

Solution. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère le recouvrement ouvert $\left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}_{x \in X}$. Puisque X est compact, il existe $x_{n,1}, \ldots, x_{n,m_n}$ tels que $X = B\left(x_{n,1}, \frac{1}{n}\right) \cup \cdots \cup B\left(x_{n,m_n}, \frac{1}{n}\right)$. On pose

$$E = \{x_{n,k} \mid n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq m_n\}.$$

C'est un ensemble au plus dénombrable, puisqu'il s'écrit comme l'union dénombrable d'ensembles finis.

On montre maintenant que $\overline{E} = X$. Soit $x \in X \setminus E$ et soit $r > 0$. On choisit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} < r$. Puisque $X = B\left(x_{n,1}, \frac{1}{n}\right) \cup \cdots \cup B\left(x_{n,m_n}, \frac{1}{n}\right)$, il existe $k \in \{1, \ldots, m_n\}$ tel que $x \in B\left(x_{n,k}, \frac{1}{n}\right)$. Ainsi, on a $d(x, x_{n,k}) < \frac{1}{n} < r$ et donc $x \in E'$.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $E \subseteq X$. Montrer que E est borné si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$ tel que $E \subseteq B(x, r)$.

Exercice 8. Déterminer si les sous-ensembles suivants sont compacts dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$:

a) $E = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1\}$;

b) le triangle plein T de sommets $(0, 0)$, $(5, 0)$ et $(0, 2)$ et qui inclut les côtés et l'intérieur;

c) les côtés seulement du triangle T.

Solution. a) Non, car E n'est pas borné.

b) Oui, car il est fermé est borné.

c) Oui, comme au b).

Exercice 9. Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$ et soit $\dot{D} = D \setminus \{(0, 0)\}$. Par le théorème de Heine-Borel, D est compact. Si $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de D, alors on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Puisque $\dot{D} \subseteq D$, ce sous-recouvrement recouvre $\dot{D}$. Donc $\dot{D}$ est compact.
Où est l'erreur dans ce raisonnement?

Solution. L'erreur est qu'il y a des recouvrements ouverts de $\dot{D}$ qui ne sont pas pris en compte, car tous les recouvrements ouverts de $\dot{D}$ ne sont pas nécessairement des recouvrements ouverts de D. En effet, on a

$$\dot{D} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \dot{D} \setminus \overline{B}\big((0,0), \tfrac{1}{n}\big),$$

donc c'est un recouvrement ouvert de $\dot{D}$, mais ce n'est pas un recouvrement ouvert de D. De plus, on voit que ce recouvrement ne possède pas de sous-recouvrement fini.

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $K_n \subseteq X$ des compacts.

a) Montrer que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} K_n$ est compact si $N < \infty$.

b) Est-ce que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ est compact en général?

c) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{N} K_n$ est compact si $N < \infty$.

d) Est-ce que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ est compact en général?

Solution. a) Si $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} K_n$, alors c'est un recouvrement ouvert de K_k pour chaque k. Ainsi, pour chaque k, il y a un sous-recouvrement $U_{i_{1,k}}, \ldots U_{i_{j_k,k}}$. Il suit que $\{U_{i_{\ell,k}}\}$ est un sous-recouvrement ouvert fini de $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{N} K_k$.

b) Non, par exemple $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n] = \mathbb{R}$ qui n'est pas compact.

c) et d) Oui. On a que $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ est contenu dans K_1 et est fermé, donc c'est un compact.

Exercice 11. Soit (X, d) un espace métrique et soit $E \subseteq X$ un ensemble borné et non vide. Le *diamètre* de E est $\delta(E) := \displaystyle\sup_{x,y\in E} d(x, y)$.

a) Montrer que si E est contenu dans une boule fermé de rayon r, alors $\delta(E) \leq 2r$.

b) La réciproque est-elle vraie? (Pensez à des espaces métriques autre que $(\mathbb{R}^n, d_p)$, $p \in \{1, 2, \infty\}$.)

c) Montrer que si E est compact, alors il existe $x, y \in E$ tels que $\delta(E) = d(x, y)$.

d) Montrer que c) est faux en général si E n'est pas compact.

Exercice 12. Soit E l'ensemble des nombres $x \in [0, 1]$ dont le développement décimal ne contient que les chiffres 4 et 7. Est-ce que E est compact?

Exercice 13. Soit l'espace métrique (ℓ^∞, d_∞) (voir la série 1 au besoin). Trouver un exemple d'ensemble fermé et borné qui n'est pas compact.

Solution. On peut prendre $\overline{B}(x, 1)$, où $x = (0, 0, 0, \ldots)$. Cet ensemble est fermé et borné. Par contre, il ne possède pas la propriété de Bolzano-Weierstrass, puisque la suite $x^{(n)} = (\varepsilon_{jn})_{j\in\mathbb{N}}$, où ε_{jn} vaut 1 si $n = j$ et 0 sinon, n'a pas de sous-suite convergente.

Exercice 14. (Cet exercice a été fait en classe, mais vous pouvez essayer de le refaire sans consulter vos notes.) Soit (X, d) un espace métrique et soit $K \subseteq X$ qui possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

a) Montrer que K est totalement borné.

b) Montrer que pour tout $\{U_i\}_{i\in I}$, il existe une constante de Lebesgue pour $\{U_i\}_{i\in I}$ et K (voir l'exercice 3).

c) Montrer que K est compact.

Exercice 15. Soit K un compact dans l'espace métrique (X, d) et soit L un compact dans l'espace métrique (Y, d'). Montrer que $K \times L$ est un compact dans l'espace métrique $(X \times Y, d_p)$ $(p \in \{1, 2, \infty\})$, où $d_p\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \Big\|\Big(d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\Big)\Big\|_p$. (Consulter la section 1.1 des notes au besoin.)

Exercice 16. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ non compact.

a) Trouver $f\colon E \to \mathbb{R}$ continue, mais non bornée.

b) Trouver $f\colon E \to \mathbb{R}$ continue et bornée, mais qui n'atteint pas son maximum.

c) Si de plus E est borné, trouver $f\colon E \to \mathbb{R}$ continue, mais pas uniformément continue.

Suggestion. Pour a) et b), traitez séparément les cas où E est borné et E est non borné.

Exercice 17. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ compact et $f\colon E \to \mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si son graphe $G := \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Solution. Si f est continue, alors $E \times f(E)$ est compact dans $\mathbb{R}^2$ et $G \subseteq E \times F(E)$, donc il suffit de montrer que G est fermé. Cela est direct : si $\big(x_n, f(x_n)\big)$ est une suite qui converge vers (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, puisque f est continue, on a que $f(x_n) \to f(x)$, donc $y = f(x)$, d'où $(x, y) \in G$. On conclut que G est fermé.

Ensuite, si G est compact, alors G possède la propriété de Bolzano-Weierstrass. Soit (x_n) une suite de E qui converge vers x_0. On suppose que f n'est pas continue en x_0, donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ et $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$. Ainsi, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_k \geq k$ tel que $|f(x_{n_k}) - f(x)| \geq \varepsilon$. On obtient ainsi une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) (en effet, on peut supposer que $n_k < n_{k+1}$, quitte à renommer les indices n_{k_i}). On sait que $x_{n_k} \to x_0$, puisque (x_n) est une suite convergente.

Par la compacité de G, la suite $\big(x_{n_k}, f(x_{n_k})\big)$ possède une sous-suite $\big(x_{n_{k_\ell}}, f(x_{n_{k_\ell}})\big)$ qui converge vers, disons, $(x_0, y) \in G$. Par définition de G, on a $y = f(x_0)$ et donc $f(x_{n_{k_\ell}}) \to f(x)$. On a donc qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $\ell \geq N$, on a $|f(x_{n_{k_\ell}}) - f(x_0)| < \varepsilon$, ce qui est une contradiction.

Exercice 18. La sphère unité $S = \partial B(\vec{0}, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$ est-elle homéomorphe au plan $\mathbb{R}^2$?

Solution. Impossible, car S est compact (fermé et borné dans $\mathbb{R}^3$), mais $\mathbb{R}^2$ n'est pas compact ($\{B(\vec{0}, n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de SRF).

Exercice 19. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$, alors f est unifomément continue sur $\mathbb{R}$.

Solution. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe M_+ tel que si $x \geq M_+$, alors $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. De même, il existe M_- tel que si $x \leq M_-$, alors $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. On pose $M = \max\{|M_+|, |M_-|\}$. On conclut que si $|x| \geq M$, alors $|f(x)| < \varepsilon$. De plus, si $|x|, |y| \geq M$, alors on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad (*)$$

Ensuite, puisque $[-M-2, M+2]$ est compact, f y est uniformément continue. Il existe $\delta^* > 0$ tel que pour tout $x, y \in [-M-2, M+2]$, on a

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

On pose $\delta := \min\{1, \delta^*\}$. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \delta \leq 1$. On a deux cas :

1. si $x, y \in [-M-2, M+2]$, alors on a bien $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$;
2. si $|x| > M+2$, alors $|y| > M+1$ et vice versa; dans ce cas, on a encore $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ par $(*)$.

On voit donc que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit d la métrique induite par cette norme. Montrer que d et d_∞ sont Lipschitz équivalentes en suivant ces étapes.

a) Montrer qu'il existe $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\| \leq M\|x\|_\infty$. En déduire que $\|\cdot\|$ est continue lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Solution. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on a

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \|e_j\| \leq \|x\|_\infty \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|.$$

On obtient donc l'inégalité avec $M = \sum_j \|e_j\|$.

Ensuite, on a

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\| \leq M \|x - y\|_\infty.$$

Avec $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, on obtient la continuité.

b) Montrer que $\partial B_\infty(\vec{0}, 1) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$ est compact dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

Solution. On sait que l'intervalle $[-2, 2]$ est compact dans $\mathbb{R}$. Par le numéro 15, il suit que $[-2, 2]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ est compact dans $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$.

Ensuite, on sait que la frontière d'un ensemble est fermé. De plus, on a que $\partial B_\infty(\vec{0}, 1)$ est contenu dans $[-2, 2]^n$. Un fermé dans un compact est compact, d'où $\partial B_\infty(\vec{0}, 1)$ est compact.

c) Montrer que $\|\cdot\|$ atteint son maximum et son minimum sur $\partial B_\infty(\vec{0}, 1)$.

Solution. Puisque $\|\cdot\|$ est continue et que $\partial B_\infty(\vec{0}, 1)$ est compact, elle atteint son maximum et son minimum.

d) Déduire qu'il existe $A, B > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$A\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq B\|x\|_\infty.$$

Solution. Soit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ tels que $\|x_0\|$ et $\|y_0\|$ sont respectivement le minimum et le maximum de $\|\cdot\|$ sur $\partial B_\infty(\vec{0}, 1)$. Pour tout $z \neq 0$, on a que $\frac{z}{\|z\|_\infty} \in \partial B_\infty(\vec{0}, 1)$. Ainsi, on obtient

$$\|x_0\| \leq \frac{\|z\|}{\|z\|_\infty} \leq \|y_0\|.$$

On obtient l'inégalité avec $A = \|x_0\|$ et $B = \|y_0\|$. Enfin, le cas où $z = 0$ est trivial.

e) (Optionnel) Qu'est-ce qui ne fonctionne pas dans la démonstration si on remplace $\mathbb{R}^n$ par un espace vectoriel quelconque (p.ex. $C[a, b]$)?

Solution. Le problème principal est que $\partial B_\infty(\vec{0}, 1)$ n'est pas nécessairement compact (ou l'analogue de cet ensemble si on adaptait la démonstration).

En fait, on peut montrer (voir analyse fonctionnelle) que, pour un espace vectoriel normé, la boule fermée est compact si et seulement si la dimension de l'espace est finie. Cela est vrai aussi pour $\partial B(0, 1)$.

Exercices supplémentaires

Cette section est optionnelle.

Soit (X, d) un espace métrique et $E \subseteq X$ un sous-ensemble. On rappelle que la distance entre E et x est

$$\operatorname{dist}(x, E) = \inf_{y \in E} d(x, y).$$

On définit l'*épaississement de largeur* ε de E par $E_\varepsilon = \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, E) \leq \varepsilon\}$.

Exercice 21. Montrer que $\operatorname{dist}(x, E) = r$ si et seulement si $x \in E_r$ et $x \notin E_{r-\varepsilon}$ pour tout $0 < \varepsilon < r$.

Exercice 22. On définit la distance entre $A, B \subseteq X$ par

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B).$$

a) Montrer que $\operatorname{dist}(A, B) \leq r$ si et seulement si $A \subseteq B_r$.

b) Trouver un A et B dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$ tels que $\operatorname{dist}(A, B) \neq \operatorname{dist}(B, A)$.

Exercice 23. On pose $\mathcal{C}(X) = \{K \subseteq X \mid K \text{ est compact}\}$. On définit sur $C(X)$ la fonction $d_{\mathcal{H}}(A, B) \colon \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \to [0, \infty)$ par

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \max\{\operatorname{dist}(A, B), \operatorname{dist}(B, A)\}.$$

a) Montrer que si $d_{\mathcal{H}}(A, B) = r$, alors il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $r = d(x, y)$.

b) On pose $r = \inf\{R \geq 0 \mid A \subseteq B_R \text{ et } B \subseteq A_R\}$. Montrer que $r = \operatorname{dist}(A, B)$.

c) Montrer que $d_{\mathcal{H}}$ est une métrique.

On appelle $d_{\mathcal{H}}$ la *distance de Hausdorff*. L'espace $(\mathcal{C}(X), d_{\mathcal{H}})$ est un exemple intéressant d'espace métrique qui ne provient pas d'un espace vectoriel normé.