Analyse 3

Série 3

Compacité

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique compact et discret. Montrer que X est fini.

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique et soit (x_n) une suite dans X telle que $x_n \to x \in X$. Montrer que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique, $K \subseteq X$ un compact et $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de K. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ pour lequel $B(x, \delta) \subseteq U_i$. (Un tel δ est appelé une *constante de Lebesque* pour K et $\{U_i\}_{i\in I}$.)

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique, U un ouvert de X et $K \subseteq U$ un compact non vide.

a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $K_\varepsilon := \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, K) \leq \varepsilon\} \subseteq U$.
   Suggestion. Utilisez le 3. Voir la série 2 pour la définition de dist.

b) Montrer que si K est fermé mais non compact, alors il est possible que a) soit faux.

Exercice 5. Soit (X, d) un espace métrique, $F \subseteq X$ un fermé dans X et $K \subseteq X$ un compact tels que $F \cap K = \emptyset$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $d(x, y) \geq r$ pour tout $x \in F$ et tout $y \in K$.

Exercice 6. Montrer que si (X, d) est un espace métrique compact, alors il est *séparable* : il existe $E \subseteq X$ au plus dénombrable et dense dans X.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $E \subseteq X$. Montrer que E est borné si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe $r > 0$ tel que $E \subseteq B(x, r)$.

Exercice 8. Déterminer si les sous-ensembles suivants sont compacts dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$:

a) $E = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, xy \leq 1\}$;

b) le triangle plein T de sommets $(0, 0)$, $(5, 0)$ et $(0, 2)$ et qui inclut les côtés et l'intérieur;

c) les côtés seulement du triangle T.

Exercice 9. Soit D le disque unité fermé de $\mathbb{R}^2$ et soit $\dot{D} = D \setminus \{(0, 0)\}$. Par le théorème de Heine-Borel, D est compact. Si $\{U_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de D, alors on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Puisque $\dot{D} \subseteq D$, ce sous-recouvrement recouvre $\dot{D}$. Donc $\dot{D}$ est compact.
Où est l'erreur dans ce raisonnement?

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $K_n \subseteq X$ des compacts.

a) Montrer que $\bigcup_{n=1}^{N} K_k$ est compact si $N < \infty$.

b) Est-ce que $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ est compact en général?

c) Montrer que $\bigcap_{n=1}^{N} K_k$ est compact si $N < \infty$.

d) Est-ce que $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ est compact en général?

Exercice 11. Soit (X, d) un espace métrique et soit $E \subseteq X$ un ensemble borné et non vide. Le *diamètre* de E est $\delta(E) := \sup_{x,y \in E} d(x, y)$.

a) Montrer que si E est contenu dans une boule fermé de rayon r, alors $\delta(E) \leq 2r$.

b) La réciproque est-elle vraie? (Pensez à des espaces métriques autre que $(\mathbb{R}^n, d_p)$, $p \in \{1, 2, \infty\}$.)

c) Montrer que si E est compact, alors il existe $x, y \in E$ tels que $\delta(E) = d(x, y)$.

d) Montrer que c) est faux en général si E n'est pas compact.

Exercice 12. Soit E l'ensemble des nombres $x \in [0, 1]$ dont le développement décimal ne contient que les chiffres 4 et 7. Est-ce que E est compact?

Exercice 13. Soit l'espace métrique (ℓ^∞, d_∞) (voir la série 1 au besoin). Trouver un exemple d'ensemble fermé et borné qui n'est pas compact.

Exercice 14. (Cet exercice a été fait en classe, mais vous pouvez essayer de le refaire sans consulter vos notes.) Soit (X, d) un espace métrique et soit $K \subseteq X$ qui possède la propriété de Bolzano-Weierstrass.

a) Montrer que K est totalement borné.

b) Montrer que pour tout $\{U_i\}_{i \in I}$, il existe une constante de Lebesgue pour $\{U_i\}_{i \in I}$ et K (voir l'exercice 3).

c) Montrer que K est compact.

Exercice 15. Soit K un compact dans l'espace métrique (X, d) et soit L un compact dans l'espace métrique (Y, d'). Montrer que $K \times L$ est un compact dans l'espace métrique $(X \times Y, d_p)$ ($p \in \{1, 2, \infty\}$), où $d_p\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \Big\| \Big(d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\Big) \Big\|_p$. (Consulter la section 1.1 des notes au besoin.)

Exercice 16. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ non compact.

a) Trouver $f\colon E \to \mathbb{R}$ continue, mais non bornée.

b) Trouver $f\colon E \to \mathbb{R}$ continue et bornée, mais qui n'atteint pas son maximum.

c) Si de plus E est borné, trouver $f\colon E \to \mathbb{R}$ continue, mais pas uniformément continue.

Suggestion. Pour a) et b), traitez séparément les cas où E est borné et E est non borné.

Exercice 17. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ compact et $f\colon E \to \mathbb{R}$. Montrer que f est continue si et seulement si son graphe $G := \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 18. La sphère unité $S = \partial B(\vec{0}, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$ est-elle homéomorphe au plan $\mathbb{R}^2$?

Exercice 19. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $f(x) \to 0$ lorsque $x \to \pm\infty$, alors f est unifomément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. Normes équivalentes sur $\mathbb{R}^n$. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Soit d la métrique induite par cette norme. Montrer que d et d_∞ sont Lipschitz équivalentes en suivant ces étapes.

a) Montrer qu'il existe $M > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $\|x\| \le M\|x\|_\infty$. En déduire que $\|\cdot\|$ est continue lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

b) Montrer que $\partial B_\infty(\vec{0}, 1) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_\infty = 1\}$ est compact dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$.

c) Montrer que $\|\cdot\|$ atteint son maximum et son minimum sur $\partial B_\infty(\vec{0}, 1)$.

d) Déduire qu'il existe $A, B > 0$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$A\|x\|_\infty \le \|x\| \le B\|x\|_\infty.$$

e) (Optionnel) Qu'est-ce qui ne fonctionne pas dans la démonstration si on remplace $\mathbb{R}^n$ par un espace vectoriel quelconque (p.ex. $C[a, b]$)?

Exercices supplémentaires

Cette section est optionnelle.

Soit (X, d) un espace métrique et $E \subseteq X$ un sous-ensemble. On rappelle que la distance entre E et x est

$$\operatorname{dist}(x, E) = \inf_{y \in E} d(x, y).$$

On définit l'*épaississement de largeur* ε de E par $E_\varepsilon = \{x \in X \mid \operatorname{dist}(x, E) \le \varepsilon\}$.

Exercice 21. Montrer que $\operatorname{dist}(x, E) = r$ si et seulement si $x \in E_r$ et $x \notin E_{r-\varepsilon}$ pour tout $0 < \varepsilon < r$.

Exercice 22. On définit la distance entre $A, B \subseteq X$ par

$$\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \operatorname{dist}(x, B).$$

a) Montrer que $\operatorname{dist}(A, B) \leq r$ si et seulement si $A \subseteq B_r$.

b) Trouver un A et B dans $(\mathbb{R}^2, d_2)$ tels que $\operatorname{dist}(A, B) \neq \operatorname{dist}(B, A)$.

Exercice 23. On pose $\mathcal{C}(X) = \{K \subseteq X \mid K \text{ est compact}\}$. On définit sur $C(X)$ la fonction $d_{\mathcal{H}}(A, B) \colon \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(X) \to [0, \infty)$ par

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \max\{\operatorname{dist}(A, B), \operatorname{dist}(B, A)\}.$$

a) Montrer que si $d_{\mathcal{H}}(A, B) = r$, alors il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $r = d(x, y)$.

b) On pose $r = \inf\{R \geq 0 \mid A \subseteq B_R \text{ et } B \subseteq A_R\}$. Montrer que $r = \operatorname{dist}(A, B)$.

c) Montrer que $d_{\mathcal{H}}$ est une métrique.

On appelle $d_{\mathcal{H}}$ la *distance de Hausdorff*. L'espace $(\mathcal{C}(X), d_{\mathcal{H}})$ est un exemple intéressant d'espace métrique qui ne provient pas d'un espace vectoriel normé.