Analyse 3

Série 2 (solutionnaire partiel)

Fonctions continues

Exercice 1. Soit X, Y des ensembles, soit I un ensemble d'indices et pour chaque $i \in I$, soit $A_i \subseteq X$ et $B_i \subseteq Y$ des sous-ensembles. Soit $f \colon X \to Y$ une fonction. Montrer les inclusions d'ensembles suivants.

a) $f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

b) $f^{-1}(\cap_{i\in I} B_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

c) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$ pour tout $B_1, B_2 \subseteq Y$

d) $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$ pour tout $B \subseteq Y$

e) $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$

f) $f(\cap_{i\in I} A_i) \subseteq \cap_{i\in I} f(A_i)$

g) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$

h) si f est injective, alors il y a égalité au f)

i) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, alors f est injective

j) si f est injective, alors il y a égalité au g)

k) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$, alors f est injective.

Solution. a) Soit $x \in f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i)$. Par définition, on a$f(x) \in \cup_{i\in I} B_i$. Ainsi, il existe i_0 tel que $f(x) \in B_{i_0}$. Il suit que $x \in f^{-1}(B_{i_0})$ et donc que $x \in \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. On conclut que $f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) \subseteq \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

Pour l'inclusion dans l'autre sens, soit $x \in \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. Il existe i_0 tel que $x \in f^{-1}(B_{i_0})$. Ainsi, on a $f(x) \in B_{i_0} \subseteq \cup_{i\in I} \cup_{i\in I} B_i$. On a donc que $x \in f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i)$. Conclusion : $f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) \supseteq \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

f) Soit $y \in f(\cap_{i\in I} A_i)$. Il existe $x \in \cap_{i\in I} A_i$ tel que $y = f(x)$. Puisque $x \in A_i$ pour tout i, on a que $y \in f(A_i)$ pour tout i, d'où $y \in \cap_{i\in I} f(A_i)$. On a bien l'inclusion.

Pour voir que l'inclusion peut être stricte, il faut une fonction qui ne soit pas injective. On prend $f(x) = x^2$. Avec $A_1 = [-1, 0]$ et $A_2 = [0, 1]$, on obtient $A_1 \cap A_2 = \{0\}$ et donc $f(\{0\}) = \{0\}$. Par contre, on a $f(A_1) = [0, 1]$ et $f(A_2) = [0, 1]$ et donc $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 1]$.

h) Soit $y \in \cap_{i\in I} f(A_i)$. Alors $y \in f(A_i)$ pour chaque i. Il existe $x_i \in A_i$ tel que $f(x_i) = y$. Puisque f est injective, on a $x_i = x_j = x$ pour tout $i, j \in I$. Ainsi, comme $x \in \cap_{i\in I} A_i$, on a $y = f(x) \in f(\cap_{i\in I} A_i)$.

i) On suppose le contraire, alors il existe x_1 et x_2 distincts tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On pose $A_1 = \{x_1\}$ et $A_2 = \{x_2\}$. On a donc $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ et $f(A_1) = f(A_2)$, ce qui est une contradiction.

Exercice 2. Soit X, Y des ensembles et $f\colon X \to Y$ une fonction.

a) Est-ce que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$ pour tout $B \in Y$?

b) Est-ce que $f\big(f^{-1}(B)\big) \supseteq B$ pour tout $B \in Y$?

c) Est-ce que $f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq A$ pour tout $A \in X$?

d) Est-ce que $f^{-1}\big(f(A)\big) \supseteq A$ pour tout $A \in X$?

e) Pour les énoncés dont la réponse est non, quelle condition sur f est nécessaire et suffisante afin que la réponse devienne oui?

Solution. a) Oui b) Non c) Non d) Oui

e) Au b), f surjective fait l'affaire. Au c), f injective est fait l'affaire.

Exercice 3. Quelles sont les fonctions $f\colon (\mathbb{R}, d_2) \to (\mathbb{R}, d)$ qui sont continues lorsque d est la métrique discrète?

Solution. Ce sont les fonctions constantes. Il est clair que si f est constante, alors f est continue.

Supposons que f ne soit pas constante. Alors il existe $x < y$ tels que $f(x) \neq f(y)$. On pose

$$s = \sup\{z \geq x \mid \ f \text{ est constante sur } [x, z]\}.$$

Alors, on a $x \leq s \leq y$. Puisque f est continue en s, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|s - z| < \delta$, alors $d\big(f(s), f(z)\big) < \frac{1}{2}$. Or, cela est une contradiction, car f est n'est pas constante sur $(s - \delta, s + \delta)$.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+h) - f(x-h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}$?

Solution. Non. Par exemple, on définit $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 0$.

Exercice 5. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Soit $L \subseteq \mathbb{R}^2$ une droite passant par l'origine. Montrer que si $\big((x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de L telle que $(x_n, y_n) \to (0,0)$ lorsque $n \to \infty$, alors $f(x_n, y_n) \to f(0,0)$ lorsque $n \to \infty$.

b) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 6. Soit C l'ensemble de Cantor. Au numéro 32 de la série 1, on a montré que C est l'ensemble des nombres de $[0,1]$ dont le développement ternaire ne contient que des 0 et des 2. On définit

$$\begin{aligned} \varphi\colon C &\to [0,1] \\ x &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n/2}{2^n}, \end{aligned}$$

où $x = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{3^n}$, $x_n \in \{0,2\}$.

a) Montrer que φ est continue sur (C, d_2).

b) Montrer que φ est croissante.

c) Montrer que φ est surjective.

d) Soit $x, y \in C$ tels que $x < y$. Montrer que $\varphi(x) = \varphi(y)$ si et seulement s'il existe n tel que (x,y) est un des intervalles retranchés de C_{n-1} pour construire C_n (voir l'exercice 32 de la série 1).

e) Montrer qu'il existe une unique fonction $\psi\colon [0,1] \to [0,1]$ telle que ψ est croissante, continue et $\psi(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in C$. On appelle ψ la *fonction de Cantor*.

f) On définit la suite de fonctions $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$ par $f_0(x) = x$ et

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{n-1}(3x), & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_{n-1}(3x-2), & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Esquisser le graphe de f_n pour les quelques premiers n.

g) Montrer que f_n est continue et croissante pour tout $n \geq 0$.

h) Montrer que f_n converge uniformément vers ψ sur $[0,1]$.
Indice. Si $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$, on note $x^{(n)}$ le nombre $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+n}}{3^k}$. Trouvez une formule explicite de $f_n(x)$ en terme des x_k et de $x^{(j)}$. Ensuite, vous pouvez vous inspirez de la démonstration du deuxième théorème de Dini au besoin.

Solution. a) Soit $\left(x^{(k)}\right)$ une suite de C qui converge vers x. Puisque chaque $x^{(k)}$ est dans C, leur développement ternaire possède la forme

$$x^{(k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^{(k)}}{3^n}, \qquad \text{où } x_n^{(k)} \in \{0, 2\}.$$

Puisque $x^{(k)} \to x$ lorsque $k \to \infty$, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq K$, on a $x_n^{(k)} = x_n$, pour tout $n < N$. En effet, sinon on aurait $|x^{(k)} - x| \geq 3^{-N+1}$ pour une infinité de k.

Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $N \in \mathbb{N}$ de sorte que $2^{-N+1} < \varepsilon$. Si $k \geq K$, on a

$$\begin{aligned}
|\varphi(x_n) - \varphi(x)| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^{(k)}/2}{2^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n/2}{2^n} \right| \\
&\leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|x_n^{(k)} - x_n|}{2 \cdot 2^n} \\
&\leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2^n} \\
&= 2 - \frac{1 - 2^{-N}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \frac{2 - 1 - 1 + 2^{-N}}{\frac{1}{2}} \\
&= 2^{-N+1} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

D'où $\varphi(x^{(k)}) \to \varphi(x)$ lorsque $k \to \infty$ et donc φ est continue en $x \in C$.

b) Si $x < y$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = y_n$ si $n < k$ et $x_k < y_k$. On a donc

$$\begin{aligned}
\varphi(y) - \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n - x_n}{2 \cdot 2^n} &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{y_n - x_n}{2 \cdot 2^n} \\
&= \frac{1}{2^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{y_n - x_n}{2 \cdot 2^n} \\
&\geq \frac{1}{2^k} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^k} - \left(2 - \frac{1-2^{k+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^k} = 0.
\end{aligned}
$$

Ainsi, φ est croissante.

c) Soit $y \in [0,1]$. Ce nombre possède un développement binaire $y = \sum_{n=1}^{\infty} y_n/2^n$, où $y_n \in \{0,1\}$. On pose $x = \sum_{n=1}^{\infty} 2y_n/3^n$. Alors $x \in C$ et $\varphi(x) = y$.

d) Dans la série 1, on a montré que x est l'extrémité gauche d'un intervalle de C_n si et seulement si $x = \sum_{k=1}^{n} x_k/3^k$, où $x_k\{0,2\}$. Ainsi, les extrémités droites ont la forme $y = \sum_{k=1}^{n} x_k/3^k + 3^{-n}$.

Ensuite, soit $x < y$ avec leur développement ternaire $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$ et $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}$. Puisque $x < y$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x_n = y_n$ si $n < k$ et $x_k = 0$, $y_k = 2$. On a

$$
0 \leq \varphi(y) - \varphi(x) = \frac{1}{2^k} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{y_n - x_n}{2 \cdot 2^n}.
$$

Ainsi, on aura $\varphi(y) = \varphi(x)$ si et seulement si $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \frac{y_n - x_n}{2 \cdot 2^n} = -2^{-k}$ si et seulement si $y_n = 0$ et $x_n = -2$ pour tout $n \geq k+1$. On a donc

$$
\begin{aligned}
\varphi(x) = \varphi(y) &\Leftrightarrow x = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{x_n}{3^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \quad \text{et} \quad y = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{x_n}{3^n} + \frac{2}{3^k} \\
&\Leftrightarrow x = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{x_n}{3^n} + \frac{1}{3^k} \quad \text{et} \quad y = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{x_n}{3^n} + \frac{2}{3^k}
\end{aligned}
$$

On voit ainsi que (x,y) est un intervalle retranché de C_{k-1}.

e) Si $x \in [0,1] \setminus C$, alors x se trouve dans un intervalle retranché (x_0, y_0) d'un certain C_n pour un unique $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on définit $\psi(x) = \varphi(x_0) = \varphi(y_0)$. Ainsi, ψ est constante sur les intervalles retranchées.

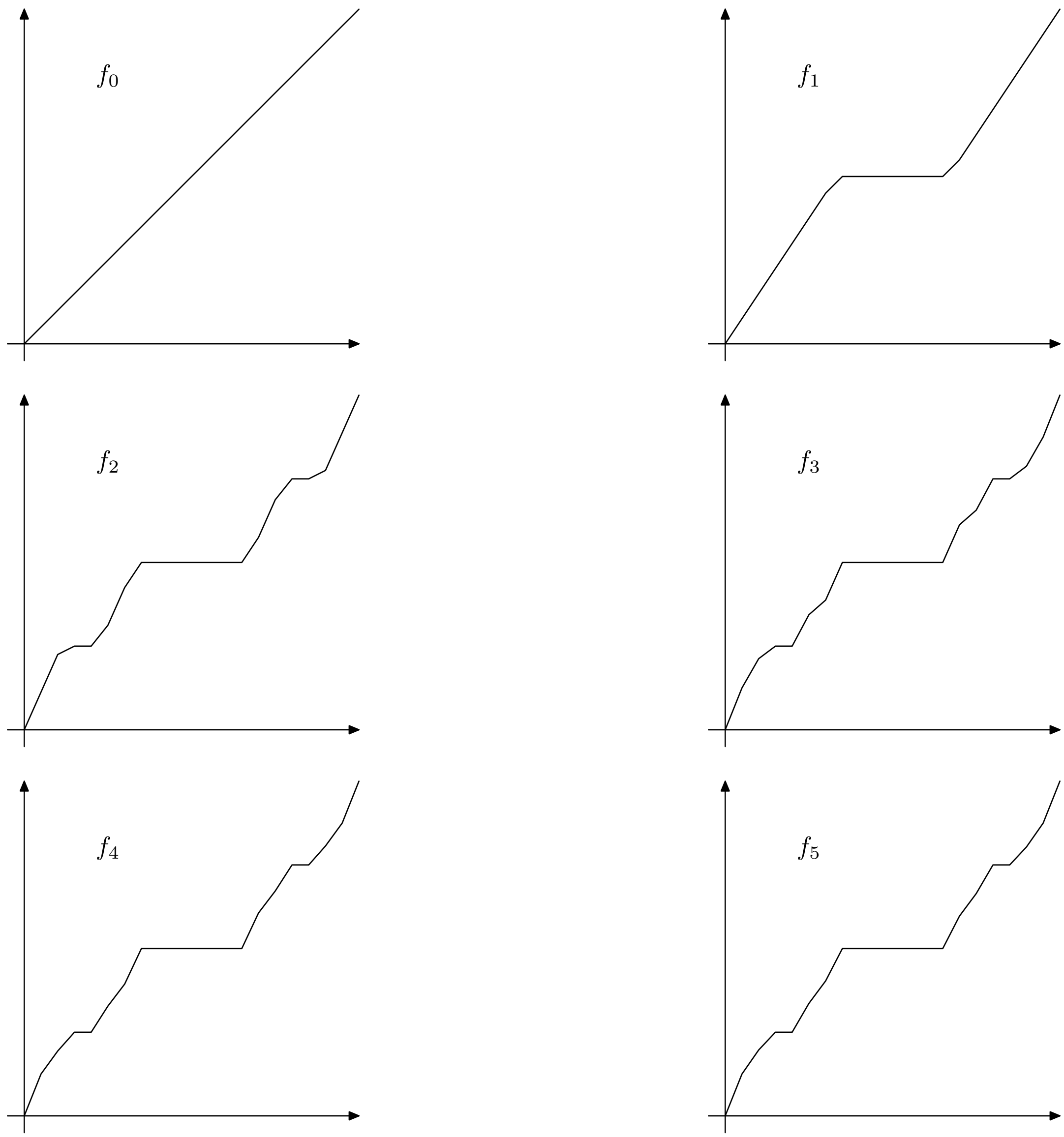
Cela est la seule définition possible de ψ, car sinon ψ ne serait pas croissante. Si $x \in [0,1] \setminus C$, alors ψ est constante sur un intervalle contenant x et donc continue.

Soit $x \in C$ et soit (x_n) une suite de $[0,1]$ telle que $x_n \to x$. Si $x_n \notin C$, alors il existe $y_n \in C$ tel que $|y_n - x| < |x_n - x|$ et $\psi(x_n) = \psi(y_n)$ (en effet, ψ est est constante sur un intervalle contenant x_n et donc les extrémités sont dans C). Si $x_n \in C$, alors on pose $y_n = x_n$. La suite (y_n) de C converge vers x et comme φ est continue en x, on a que $\varphi(y_n) \to \varphi(x)$. Ainsi, on a

$$
\lim_{n\to\infty} |\psi(x_n) - \psi(x)| = \lim_{n\to\infty} |\psi(y_n) - \psi(x)| = \lim_{n\to\infty} |\varphi(y_n) - \varphi(x)| = 0,
$$

d'où ψ est continue en x.

f)



g) Il est clair que f_0 est continue. Par récurrence, on suppose que f_{n-1} est continue et on montre que f_n est continue. Si $x \notin \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$, alors on voit que f est continue en x.

On aura besoin du fait que $f_n(1) = 1$ pour tout n. Cela se montre aisément par récurrence. On a

$$\lim_{x \to \frac{1}{3}^-} f_n(x) = \frac{1}{2} f_{n-1}(1) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \frac{1}{3}^+} f_n(x) = \frac{1}{2}.$$

D'où f_n est continue en $x = \frac{1}{3}$.

Pour $x = \frac{2}{3}$, on a

$$\lim_{x \to \frac{2}{3}^-} f_n(x) = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to \frac{2}{3}^+} f_n(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_{n-1}(0) = \frac{1}{2},$$

d'où f_n est continue en $x = \frac{2}{3}$.

Ensuite, on montre que f_n est croissante. On voit que f_0 est croissante et on montre par récurrence que f_n l'est aussi. D'abord, on voit que

$$\tfrac{1}{2} f_{n-1}(3x) \leq \tfrac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} f_{n-1}(3x-2), \tag{$*$}$$

car f_{n-1} est croissante et $0 \leq f_{n-1} \leq 1$. Soit $x \leq y$. Si $y \leq \frac{1}{3}$, alors on a $f_n(x) \leq f_n(y)$ puisque f_{n-1} est croissante. Si $x \leq \frac{1}{3} \leq y$, alors on a $f_n(x) \leq \frac{1}{2} \leq f_n(y)$ par $(*)$. Si $\frac{1}{3} \leq x \leq y \leq \frac{2}{3}$, alors f_n est constante, donc croissante. Si $x \leq \frac{2}{3} \leq y$, alors on a $f_n(x) \leq \frac{1}{2} \leq f_n(y)$ par $(*)$. Comme dernier cas, si $\frac{2}{3} \leq x \leq y$, alors on a $f_n(x) \leq f_n(y)$ car f_{n-1} est croissante.

h) Soit $x \in C$ de la forme $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$, où $x_k \in \{0, 2\}$. On note par $x^{(n)}$ le nombre $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+n}}{3^k}$.

On peut montrer que

$$f_n(x) = \frac{x_1/2}{2} + \tfrac{1}{2} f_{n-1}(x^{(1)}).$$

En appliquant cette relation à f_{n-1}, on a

$$f_n(x) = \frac{x_1/2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{x_2/2}{2} + \tfrac{1}{2} f_{n-2}(x^{(2)})\right) = \sum_{k=1}^{2} \frac{x_k/2}{2^k} + \tfrac{1}{2^2} f_{n-2}(x^{(2)}).$$

On trouve ainsi

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k/2}{2^k} + \tfrac{1}{2^n} x^{(n)}.$$

On a donc que $|f_n(x) - \psi(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout $x \in C$.

Soit $x \notin C$. Alors il existe $a < b \in C$ tels que $(a, b) \subseteq [0, 1] \backslash C$. Puisque f_n est croissante, on a $f_n(a) \leq f_n(x) \leq f_n(b)$ et donc

$$f_n(a) - \psi(x) \leq f_n(x) - \psi(x) \leq f_n(b) - \psi(x).$$

Puisque $\psi(x) = \psi(a) = \psi(b)$, on a

$$f_n(a) - \psi(a) \leq f_n(x) - \psi(x) \leq f_n(b) - \psi(b),$$

et donc $|f_n(x) - \psi(x)| \leq \max\{|f_n(a) - \psi(a)|, |f_n(b) - \psi(b)|\} \leq \frac{1}{2^n}$.

Comme on a $|f_n(x) - \psi(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ pour tout $x \in [0, 1]$, on a que $f_n \to \psi$ uniformément.

Exercice 7. Soit (X, d) et (Y, d') des espaces métriques, $f: X \to Y$ une fonction continue et $E \subseteq X$ un sous-ensemble. *Note* : On utilise le symbole $\subset$ pour indiquer l'inclusion stricte.

a) Montrer que $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$.

b) Trouver un exemple où $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$.

c) Trouver un exemple où $f(E^\circ) \subset f(E)^\circ$.

d) Trouver un exemple où $f(E^\circ) \supset f(E)^\circ$.

e) Trouver un exemple où $f(\partial E) \subset \partial f(E)$.

f) Trouver un exemple où $f(\partial E) \supset \partial f(E)$.

Solution. a) Soit $y \in f(\overline{E})$. Il existe $x \in \overline{E}$ tel que $f(x) = y$. Si $x \in E$, alors $f(x) \in f(E) \subseteq \overline{f(E)}$. Si $x \in E'$, soit (x_n) une suite de E telle que $x_n \to x$. Alors $f(x_n) \in f(E)$. Puisque f est continue, on a $f(x_n) \to f(x)$ et cette limite se trouve dans $\overline{f(E)}$. Conclusion : on a bien $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$.

Voici des exemples sans les détails pour les autres parties.

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $E = \mathbb{R}$.

c) La fonction de Cantor $\psi: [0, 1] \to [0, 1]$ et $E = C$, l'ensemble de Cantor.

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $E = \mathbb{R}$.

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $E = [-1, 1]$.

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $E = [-1, -\frac{1}{2}] \cup [0, 1]$.

Exercice 8. Soit (X, d) et (Y, d') des espaces métriques et soit $f: X \to Y$ une fonction.

a) Montrer que $E = \{x \in X \mid f \text{ est continue en } x\}$ est un G_δ.
Suggestion. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérez l'ensemble

$$U_n = \{x \in X \mid \exists \delta > 0, y, z \in B(x, \delta) \Rightarrow d'(f(y), f(z)) < \tfrac{1}{n}\}.$$

b) En déduire que les points de discontinuité de f est un F_σ.

c) Est-il possible de construire une fonction $f: (0, 1) \to \mathbb{R}$ continue en chaque point rationnel et discontinue en chaque irrationnel?

d) Soit F une F_σ de $\mathbb{R}$. Soit F_n des fermés tels que $F = \cup_{n \geq 1} F_n$. On définit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x \in F_n \cap \mathbb{Q} \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}), \\ -\frac{1}{n}, & \text{si } x \in F_n \setminus (\mathbb{Q} \cup F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}), \\ 0, & \text{si } x \notin F. \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est exactement F.
Indication. Pour montrer que f est continue sur F^c, montrez que si $x_k \to x \in F^c$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq K$, on a que $x \notin F_1 \cup \cdots \cup F_n$.

Exercice 9. Montrer que si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors f est uniformément continue.

Exercice 10. Soit $X \subseteq \mathbb{R}$ muni de la métrique d_2 et soit $f\colon (X, d_2) \to (\mathbb{R}, d_2)$ une fonction. Dans chaque cas, dire si la fonction est continue, uniformément continue, Lipschitz, une iséométrie ou rien de cela.

a) $X = [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$

b) $X = (0, 1)$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x$

d) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

e) $X = (0, \infty)$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

f)† $X = (0, \infty)$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

Solution. a) On a la continuité uniforme, mais pas Lipschitz. En effet, on voit que

$$\left| \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right|.$$

Cette quantité est non bornée, donc il ne peut y avoir de C qui donne que f est Lipschitz.

Sur l'intervalle $[1, \infty)$, on a $|f'(x)| \leq 1$, ainsi on a par le théorème des accroissements finis que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq |x - y|,$$

donc f est uniformément continue sur $[1, \infty)$. De plus, f est uniformément continue sur $[0, 1]$, puisque c'est un compact. On peut conclure que f est uniformément continue sur $[0, \infty)$ (c'est un exercice d'analyse 2).

b) On a la continuité, mais pas la continuité uniforme. En effet, il est clair que f est continue. Cependant, comme la limite lorsque $x \to 0^+$ de $f(x)$ n'existe pas, on conclut que f n'est pas uniformément continue sur $(0, 1)$.

d) On a que f est Lipschitz, mais pas une isométrique. En effet, par le théorème des accroissements finis, on a

$$|f(x) - f(y)| = |\cos \xi||x - y| \leq |x - y|.$$

On a donc une constante de Lipschitz de 1. Ensuite, si $x = 0$ et $y = 2\pi$, on a alors

$$0 = |f(0) - f(2\pi)| < |0 - 2\pi|,$$

d'où f n'est pas une isométrique.

f) On a que f est uniformément continue, mais pas Lipschitz.

On montre d'abord que f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Si $0 < x, y < \frac{\varepsilon}{2}$, alors on a

$$|f(x) - f(y)| \leq x \left|\sin \tfrac{1}{x}\right| + y \left|\sin \tfrac{1}{y}\right| \leq x + y < \varepsilon.$$

On suppose maintenant que $\max\{x, y\} \geq \frac{\varepsilon}{2}$. D'abord, pour tout z tel que si $z \geq \frac{\varepsilon}{4}$, on a

$$|f'(z)| = \left|\sin \tfrac{1}{z} - \tfrac{1}{z} \cos \tfrac{1}{z}\right| \leq \left|\sin \tfrac{1}{z} + \tfrac{1}{z} \cos \tfrac{1}{z}\right| \leq 1 + \tfrac{4}{\varepsilon} =: C.$$

Par le théorème des accroissaments finis, si $x, y \geq \frac{\varepsilon}{4}$, alors on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(\xi)||x - y| \leq C|x - y|,$$

car ξ doit assurément satisfaire à $\xi \geq \frac{\varepsilon}{4}$. On pose $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon}{C}\}$. De cette façon, puisque $\max\{x, y\} \geq \frac{\varepsilon}{2}$, on aura que $\min\{x, y\} \geq \frac{\varepsilon}{4}$ et $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \leq \varepsilon$.

Pour voir que f n'est pas Lipschitz, on prend $x = \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}$ et $y = \frac{1}{2\pi k + \frac{3\pi}{2}}$. D'une part, on a

$$|x - y| = \left| \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi k + \frac{3\pi}{2}} \right| = \frac{\pi}{(2\pi k + \frac{\pi}{2})(2\pi k + \frac{3\pi}{2})} \leq \frac{\pi}{4\pi^2 k^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

D'autre part, on a

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2\pi k + \frac{3\pi}{2}} \right| \geq \frac{1}{2\pi k}.$$

Ainsi, si f était Lipschitz de constante C, on aurait $\frac{1}{2\pi k} \leq \frac{C}{k^2}$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible.

Exercice 11. Soit $f, g\colon (X, d) \to (\mathbb{R}, d_2)$ deux fonctions.

a) Si f et g sont uniformément continues, alors est-ce que $f + g$ et fg sont uniformément continue?

b) Si f et g sont Lipschitz, montrer que $f + g$ est Lipschitz, mais que fg ne l'est pas nécessairement.

c) Si f et g sont des isométries, montrer que ni $f + g$, ni fg ne sont nécessairement des isométries.

Exercice 12. Soit $f\colon (X, d) \to (Y, d')$ et $g\colon (Y, d') \to (Z, d'')$ deux fonctions, où (X, d), (Y, d') et (Z, d'') sont des espaces métriques. Montrer que

a) si f et g sont uniformément continues, alors $g \circ f$ est uniformément continue;

b) si f et g sont Lipschitz, alors $g \circ f$ sont Lipschitz;

c) si f et g sont des isométries, alors $g \circ f$ est une isométrie.

Exercice 13. Montrer que la fonction de Cantor ψ (voir l'exercice 6) n'est pas Lipschitz.

Solution. On suppose le contraire, donc il existe $C \geq 0$ telle que $|\psi(x) - \psi(y)| \leq C|x - y|$. On prend $x = 0$ et $y = 3^{-n} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$. On a lors que $\psi(0) = 0$ et $\psi(y) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2^{-n}$. On obtient

$$\tfrac{1}{2^n} = |\psi(x) - \psi(y)| \leq C|x - y| = \tfrac{C}{3^n},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est équivalent à $C \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, une contradiction.

Exercice 14. On considère l'espace métrique $(C[a,b], d_1)$ et la fonction $T\colon C[a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $T(f) = \int_a^b |f|$. Est-ce que T est continue, uniformément continue, Lipschitz, une isométrie ou rien de cela?

Solution. On montre que T est continue. Soit (f_n) une suite qui converge vers $f \in C[a,b]$ avec la métrique d_1. On remarque que $T(f) = d_1(f, 0)$. Par le numéro 2 de la série 1, on a

$$|T(f) - T(f_n)| = |d_1(f_n, 0) - d_1(0, f)| \leq d_1(f_n, f) \to 0 \qquad \text{lorsque } n \to \infty.$$

On montre maintenant T est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ et soit $f, g \in C[a,b]$ telles que $d_1(f,g) < \delta$. On a

$$|T(f) - T(g)| \leq d_1(f,g) < \delta.$$

Ainsi, avec $\delta = \varepsilon$, on obtient la continuité uniforme.

On montre maintenant que T est Lipschitz. Pour toute $f, g \in C[a,b]$, on a

$$|T(f) - T(g)| \leq d_1(f,g),$$

donc T est Lipschitz avec constante $C = 1$.

On montre enfin que T n'est pas une isométrie. Soit $f(x) = x$ et $g(x) = -x$ sur $[a,b]$. On a alors

$$|T(f) - T(g)| = 0$$

et

$$d_1(f,g) = \int_a^b |x + x| \neq 0.$$

On conclut que $|T(f) - T(g)| \neq d_1(f,g)$.

Exercice 15. (Théorème de Weierstrass) On considère $C[a,b]$ muni de la métrique d_∞. Soit $\mathcal{P} = \{\text{polynômes}\} \subseteq C[a,b]$. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{P}$ est dense dans $(C[a,b], d_\infty)$.

a) Montrer que « $\mathcal{P}$ est dense dans $C[a,b]$ » est équivalent à « pour toute $f \in C[a,b]$, il existe une suite (P_n) de $\mathcal{P}$ telle que $P_n \to f$ uniformément sur $[a,b]$ ».

b) Montrer que le résultat général suit du cas particulier où $a = 0$, $b = 1$ et $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n$, où c_n est l'unique constante positive telle que $\int_{-1}^1 Q_n = 1$. Montrer que $c_n < \sqrt{n}$.
Suggestion. Montrer d'abord que $(1 - x^2)^n \geq (1 - nx^2)$ sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

d) Déduire que pour chaque $\delta \in (0,1)$, on a que $Q_n \to 0$ uniformément sur $[\delta, 1]$. Conclure que $\int_\delta^1 Q_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

e) Soit $f \in C[0,1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Pour tout $x \in [-1,2] \setminus [0,1]$, on prolonge f par $f(x) := 0$. Pour $x \in [0,1]$, on pose $P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t) Q_n(t)\, \mathrm{d}t$. Montrer que P_n est un polynôme.

f) Justifier le fait que f est bornée est uniformément continue sur $[-1, 2]$.

g) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ et $x \in [0,1]$, alors $|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Suggestion. Écrire f comme une intégrale sur $[-1, 1]$, combiner les intégrales de f et de P_n, puis scinder l'intervalle $[-1, 1]$ en $[-1, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$ et $[\delta, 1]$.

Exercice 16. a) Trouver une fonction $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et surjective.

b) Puisque $\mathbb{R}$ est ouvert, la fonction en a) est-elle un contre-exemple au théorème affirmant que $f^{-1}(\mathbb{R})$ est ouvert?

Solution. a) On peut prendre $f(x) = \frac{1}{x}\sin(\frac{1}{x})$. Il est clair que f est continue. De plus, f n'est ni majoré, ni minoré, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, l'image de f est $\mathbb{R}$.

b) Non, car $(0, 1]$ est ouvert dans l'espace métrique $\big((0, 1], |\cdot|\big)$.

Exercice 17. Une fonction $f\colon (X, d) \to (Y, d')$ est dite ouverte si $f(U)$ est ouvert dans Y pour chaque U ouvert dans X. Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est ouverte et continue, alors f est monotone.
Suggestion. Utiliser le fait qu'une fonction continue sur $[a, b]$ atteint son maximum.

Solution. On suppose le contraire, que f n'est pas monotone. Sans perte de généraité, il existe x, y, z tels que $x < y < z$, mais $f(x) < f(y)$ et $f(z) < f(y)$. On sait que f atteint son maximum M sur $[x, z]$, disons en a. On a ainsi $f(a) \geq f(y) > \max\{f(x), f(z)\}$. Il suit que $z \neq x, z$.

Puisque f est ouverte, $f\big((x, z)\big)$ est ouvert, donc il existe $\delta > 0$ tel que $B\big(f(a), \delta\big) \subseteq f\big((x, z)\big)$. En particulier, il existe $b \in (x, z)$ tel que $f(b) = f(a) + \frac{\delta}{2}$, ce qui est une contradiction.

Exercice 18. On suppose que $C[0, 1]$ est muni d'une métrique d. On définit $T\colon C[0, 1] \to \mathbb{R}$ par $T(f) = f(0)$. On pose $E = \{f \in C[0, 1] \mid f(0) = 1\}$.

a) T est-elle continue si $d = d_\infty$?

b) E est-il fermé si $d = d_\infty$?

c) T est-elle continue sur $d = d_1$?

d) E est-il fermé si $d = d_1$?

Solution. a) Oui. Soit (f_n) une suite de $C[a, b]$ telle que $f_n \xrightarrow{d_\infty} f$. En particulier, on a que $f_n \to f$ simplement, donc $f_n(0) \to f(0)$. D'où $T(f_n) \to T(f)$.

b) On a que $E = T^{-1}(\{1\})$. Puisque T est continue et $\{1\}$ est fermé, on conclut que E est fermé.

c) Non. On pose $f_n(x) = \max\{1 - nx, 0\}$. On a alors $\int_0^1 |\max\{1 - nx, 0\} - 0| = \frac{1}{2n} \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Par contre, on a $T(f_n) = 1$ pour tout n, donc $T(f_n) \not\to T(0)$.

d) L'exemple précédent montre que E n'est pas fermé, car $f_n \in E$ pour tout n, mais $f_n \xrightarrow{d_1} 0 \notin E$.

Exercice 19. Deux espaces métriques (X, d) et (Y, d') sont dits *isométriques* s'il existe une isométrie surjective de X dans Y.

a) Montrer que s'il existe une isométrie surjective de X dans Y, alors il en existe une de Y dans X, ce qui justifie la définition précédente.

b) Montrer que $([0,1], d_2)$ et $([0,2], d_2)$ ne sont pas isométriques.

Exercice 20. Soit $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ une isométrie. Montrer que $f(x) = Ax + b$, où A est une matrice $k \times k$ orthogonale et $b \in \mathbb{R}^k$ en suivant ces étapes. On suppose pour le moment que $f(0) = 0$.

a) Montrer que $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^k$.

b) Montrer que $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^k$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que $f(x) = Ax$, où A est une matrice $k \times k$ orthogonale.

d) Déduire le résultat général, c'est-à-dire lorsque $f(0) = b \in \mathbb{R}^k$.

Solution. a) En utilisant le fait que f est une isométrie en utilisant les propriétés du produit scalaire, on a

$$\begin{aligned}
d_2(x,y)^2 = d_2\big(f(x), f(y)\big) &= \|f(x) - f(y)\|^2 \\
&= \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y)\rangle \\
&= \langle f(x), f(x)\rangle + \langle f(y), f(y)\rangle - 2\,\langle f(x), f(y)\rangle \\
&= \langle f(x) - f(0), f(x) - f(0)\rangle + \langle f(y) - f(0), f(y) - f(0)\rangle - 2\,\langle f(x), f(y)\rangle \\
&= d_2\big(f(x), f(0)\big)^2 + d_2\big(f(y), f(0)\big)^2 - 2\,\langle f(x), f(y)\rangle \\
&= d_2(x,0)^2 + d_2(y,0)^2 - 2\,\langle f(x), f(y)\rangle\,.
\end{aligned}$$

De la même façon, on a

$$d_2(x,y)^2 = d_2(x,0) + d_2(y,0) - 2\,\langle x, y\rangle\,.$$

En comparant les deux équations, on conclut que $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

b) On a

$$\begin{aligned}
d_2\big(f(\alpha x + y), \alpha f(x) + f(y)\big)^2 &= \langle f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y), f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y)\rangle \\
&= \langle f(\alpha x + y), f(\alpha x + y)\rangle - 2\alpha\,\langle f(\alpha x + y), f(x)\rangle \\
&\quad - 2\,\langle f(\alpha x + y), f(y)\rangle + 2\alpha\,\langle f(x), f(y)\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \alpha^2 \langle f(x), f(x)\rangle + \langle f(y), f(y)\rangle \\
&= \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle - 2\alpha \langle \alpha x + y, x\rangle \\
&\quad - 2\langle \alpha x + y, y\rangle + 2\alpha \langle x, y\rangle + \alpha^2 \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

c) On a montré que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^k$ dans $\mathbb{R}^k$, donc f est représenté par une matrice A dont la j^e colonne est $f(e_j)$. On a également que $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$. On veut montrer que $A^tA = I$. On pose $B = A^tA - I$. Pour chaque $x, y \in \mathbb{R}^k$, on a

$$\langle Bx, y\rangle = \left\langle (A^tA - I)x, y\right\rangle = \left\langle A^tAx, y\right\rangle - \langle x, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle - \langle x, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0.$$

Ainsi, avec $x = e_j$ et $y = Be_j$, on a

$$\langle Be_j, Be_j\rangle = 0.$$

Autrement dit, on a $\|Be_j\|_2^2 = 0$ et donc $B = 0$. D'où $A^tA = I$.

d) Si $f(0) \neq 0$, alors $g(x) = f(x) - f(0)$ satisfait à la condition $g(0) = 0$. On a $g(x) = Ax$ et donc $f(x) = Ax + f(0)$.

Exercice 21. Soit (X, d), (Y, d') et (Z, d'') des espaces métriques. Soit $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ des homéomorphismes. Montrer que $g \circ f$ est un homéomorphisme.

Exercice 22. Soit (X, d) et (Y, d') des espaces métriques discrets. On suppose qu'il existe une bijection $f\colon X \to Y$.

a) Montrer que X et Y sont homéomorphes.
b) Montrer que si X et Y sont de plus uniformément discrets, alors ils sont uniformément homéomorphes.

Exercice 23. Montrer que la propriété « posséder exactement n points isolés » est une propriété topologique.

Solution. On montrer que si $f\colon X \to Y$ est continue et injective et si y est un point isolé de $f(X)$, alors $f^{-1}(y)$ est un point isolé de X.

Soit $y \in f(X)$ un point isolé. Il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \cap f(X) = \{y\}$. Soit $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Soit $\varepsilon = r$. Il existe $\delta > 0$ tel que $f\big(B(x, \delta)\big) \subseteq B(y, \varepsilon) \cap f(X) = \{y\}$. Ceci est seulement possible si $B(x, \delta) = \{x\}$, puisque f est injective. D'où x est un point isolé.

Ensuite, si f est un homéomorphisme, alors le paragraphe précédent montre que f envoie les points isolés de X sur les points isolés de Y et vice versa. Cela établit une bijection entre les points isolés de X et ceux de Y.

Exercice 24. Soit (X, d) et (Y, d') des espaces métriques et $f\colon X \to Y$ un homéomorphisme. Montrer que pour tout $E \subseteq X$, on a $f(E') = f(E)'$.

Solution. Soit $y \in f(E')$. Il existe un unique $x \in E'$ tel que $f(x) = y$. Il existe une suite (x_n) de E telle que $x_n \to x$. Ainsi, puisque f est continue, on a $f(x_n) \to f(x) = y$. Comme $f(x_n) \in f(E)$, il suit que $y \in f(E)'$.

Soit maintenant $z \in f(E)'$. Il existe une suite (z_n) de $f(E)$ telle que $z_n \to z$. Puisque f est inversible, $x_n := f^{-1}(z_n)$ forme une suite de E qui converge vers $x := f^{-1}(z)$. Ainsi, on a que $f^{-1}(z) \in E'$, donc $z \in f(E')$.

Exercice 25. Soit d et d' des métriques sur X. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

a) d et d' sont Lipschitz équivalentes;

b) il existe $A, B > 0$ telles que pour tout $x, y \in X$, on a $Ad'(x, y) \leq d(x, y) \leq Bd'(x, y)$.

c) il existe $C \geq 1$ telle que pour tout $x, y \in X$, on a $\frac{1}{C}d'(x, y) \leq d(x, y) \leq Cd'(x, y)$.

Exercice 26. Soit (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques et soit $f\colon X \to Y$ un homéomorphisme. Pour tout $x, y \in X$, on définit $d''(x, y) := d'(f(x), f(y))$.

a) Montrer que d'' est une métrique sur X. b) Montrer que d et d'' sont équivalentes.

Exercice 27. Déterminer si $d'(x, y) = |e^x - e^y|$ est équivalente, uniformément équivalente ou Lipschitz équivalente à d_2 sur $\mathbb{R}$.

Solution. Les métriques sont équivalentes, mais pas uniformément équivalente. Soit (x_n) une suite de $\mathbb{R}$. Si $x_n \xrightarrow{d_2} x$, alors puisque l'exponentielle est continue, on a que $|e^{x_n} - e^x| \to 0$, donc $x_n \xrightarrow{d} x$.

Ensuite, si $x_n \xrightarrow{d} x$, alors puisque le logarithme est continue, on a que $|\log(e^{x_n}) - \log(e^x)| \to 0$, donc on a $x_n \xrightarrow{d_2} x$. Ainsi, on a montré que $I\colon (\mathbb{R}, d_2) \to (\mathbb{R}, d)$ est continue, d'où d et d_2 sont équivalentes.

Ensuite, on aurait que I est uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |e^x - e^y| < \varepsilon.$$

Autrement dit, il faudrait montrer que l'exponentielle est uniformément continue, ce qui n'est pas le cas. En effet, Soit $\varepsilon = 1$. Pour chaque $\delta > 0$, on prend $x = -\log(|1 - e^{\frac{\delta}{2}}|)$ et $y = x + \frac{\delta}{2}$. On a alors

$$|x - y| < \delta \qquad \text{et} \qquad |e^x - e^y| = |e^x|\left|1 - e^{\frac{\delta}{2}}\right| = \frac{1}{\left|1 - e^{\frac{\delta}{2}}\right|}\left|1 - e^{\frac{\delta}{2}}\right| = 1.$$

Exercice 28. Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur un espace vectoriel X sont équivalentes si l'identité $I\colon (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|')$ est un homéomorphisme. Soit d et d' les métriques induites par $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ respectivement. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

a) $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes;

b) d et d' sont équivalentes.

Solution. L'équivalence d'écoule simplement du fait que $x_n \xrightarrow{d} x$ si et seulement si $\|x_n - x\| \to 0$.

Exercice supplémentaire

Cette section est optionnelle.

Exercice 29. Soit (X, d) un espace métrique. La distance d'un point $x \in X$ à un ensemble $E \subseteq X$ non vide est définie par

$$\operatorname{dist}(x, E) = \inf_{y \in E} d(x, y).$$

a) Montrer que pour tout $E \subseteq X$, la fonction $x \mapsto \operatorname{dist}(x, E)$ est Lipschitz sur X de constante 1.

b) Montrer que pour tout $E \subseteq X$, on a $x \in \overline{E}$ si et seulement si $\operatorname{dist}(x, E) = 0$.

c) Montrer que si E est fermé dans X, alors E est un G_δ. Déduire que si E est ouvert dans X, alors E est un F_σ.

d) (Lemme d'Urysohn) Soit E et F des fermés disjoints de X. Montrer qu'il existe une fonction continue $f \colon X \to [0, 1]$ telle que $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in E$ et $f(x) = 1$ si et seulement si $x \in F$.

e) Montrer que le lemme d'Urysohn est faux si E ou F n'est pas fermé.

f) Montrer que la fonction f du lemme d'Urysohn pourrait ne pasêtre uniformément continue.

g) (Normalité) Montrer que si E et F sont des fermés disjoints de X, alors il existe des ouverts U et V disjoints de X tels que $E \subseteq U$ et $F \subseteq V$.