# Analyse 3

## Série 2

### Fonctions continues

**Exercice 1.** Soit $X, Y$ des ensembles, soit $I$ un ensemble d'indices et pour chaque $i \in I$, soit $A_i \subseteq X$ et $B_i \subseteq Y$ des sous-ensembles. Soit $f\colon X \to Y$ une fonction. Montrer les inclusions d'ensembles suivants.

a) $f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

b) $f^{-1}(\cap_{i\in I} B_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

c) $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$ pour tout $B_1, B_2 \subseteq Y$

d) $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$ pour tout $B \subseteq Y$

e) $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$

f) $f(\cap_{i\in I} A_i) \subseteq \cap_{i\in I} f(A_i)$

g) $f(A_1 \setminus A_2) \supseteq f(A_1) \setminus f(A_2)$ pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$

h) si $f$ est injective, alors il y a égalité au f)

i) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$, alors $f$ est injective

j) si $f$ est injective, alors il y a égalité au g)

k) si pour tout $A_1, A_2 \subseteq X$, on a $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$, alors $f$ est injective.

**Exercice 2.** Soit $X, Y$ des ensembles et $f\colon X \to Y$ une fonction.

a) Est-ce que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subseteq B$ pour tout $B \in Y$?

b) Est-ce que $f\big(f^{-1}(B)\big) \supseteq B$ pour tout $B \in Y$?

c) Est-ce que $f^{-1}\big(f(A)\big) \subseteq A$ pour tout $A \in X$?

d) Est-ce que $f^{-1}\big(f(A)\big) \supseteq A$ pour tout $A \in X$?

e) Pour les énoncés dont la réponse est non, quelle condition sur $f$ est nécessaire et suffisante afin que la réponse devienne oui?

**Exercice 3.** Quelles sont les fonctions $f\colon (\mathbb{R}, d_2) \to (\mathbb{R}, d)$ qui sont continues lorsque $d$ est la métrique discrète?

**Exercice 4.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+h)-f(x-h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. Est-ce que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$?

**Exercice 5.** Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Soit $L \subseteq \mathbb{R}^2$ une droite passant par l'origine. Montrer que si $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $L$ telle que $(x_n,y_n) \to (0,0)$ lorsque $n \to \infty$, alors $f(x_n,y_n) \to f(0,0)$ lorsque $n \to \infty$.

b) La fonction $f$ est-elle continue en $(0,0)$?

**Exercice 6.** Soit $C$ l'ensemble de Cantor. Au numéro 32 de la série 1, on a montré que $C$ est l'ensemble des nombres de $[0,1]$ dont le développement ternaire ne contient que des 0 et des 2. On définit

$$\begin{aligned} \varphi\colon C &\to [0,1] \\ x &\mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n/2}{2^n}, \end{aligned}$$

où $x = \sum_{n\geq 1} \frac{x_n}{3^n}$, $x_n \in \{0,2\}$.

a) Montrer que $\varphi$ est continue sur $(C, d_2)$.

b) Montrer que $\varphi$ est croissante.

c) Montrer que $\varphi$ est surjective.

d) Soit $x, y \in C$ tels que $x < y$. Montrer que $\varphi(x) = \varphi(y)$ si et seulement s'il existe $n$ tel que $(x,y)$ est un des intervalles retranchés de $C_{n-1}$ pour construire $C_n$ (voir l'exercice 32 de la série 1).

e) Montrer qu'il existe une unique fonction $\psi\colon [0,1] \to [0,1]$ telle que $\psi$ est croissante, continue et $\psi(x) = \varphi(x)$ pour tout $x \in C$. On appelle $\psi$ la *fonction de Cantor*.

f) On définit la suite de fonctions $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$ par $f_0(x) = x$ et

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f_{n-1}(3x), & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f_{n-1}(3x-2), & \text{si } \frac{2}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Esquisser le graphe de $f_n$ pour les quelques premiers $n$.

g) Montrer que $f_n$ est continue et croissante pour tout $n \geq 0$.

h) Montrer que $f_n$ converge uniformément vers $\psi$ sur $[0,1]$.
*Indice*. Si $x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$, on note $x^{(n)}$ le nombre $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{k+n}}{3^k}$. Trouvez une formule explicite de $f_n(x)$ en terme des $x_k$ et de $x^{(j)}$. Ensuite, vous pouvez vous inspirez de la démonstration du deuxième théorème de Dini au besoin.

**Exercice 7.** Soit $(X,d)$ et $(Y,d')$ des espaces métriques, $f\colon X \to Y$ une fonction continue et $E \subseteq X$ un sous-ensemble. *Note* : On utilise le symbole $\subset$ pour indiquer l'inclusion stricte.

a) Montrer que $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$.

b) Trouver un exemple où $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$.

c) Trouver un exemple où $f(E^\circ) \subset f(E)^\circ$.

d) Trouver un exemple où $f(E^\circ) \supset f(E)^\circ$.

e) Trouver un exemple où $f(\partial E) \subset \partial f(E)$.

f) Trouver un exemple où $f(\partial E) \supset \partial f(E)$.

**Exercice 8.** Soit $(X,d)$ et $(Y,d')$ des espaces métriques et soit $f\colon X \to Y$ une fonction.

a) Montrer que $E = \{x \in X \mid f \text{ est continue en } x\}$ est un $G_\delta$.
*Suggestion*. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérez l'ensemble

$$U_n = \{x \in X \mid \exists \delta > 0, y, z \in B(x,\delta) \Rightarrow d'(f(y), f(z)) < \tfrac{1}{n}\}.$$

b) En déduire que les points de discontinuité de $f$ est un $F_\sigma$.

c) Est-il possible de construire une fonction $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ continue en chaque point rationnel et discontinue en chaque irrationnel?

d) Soit $F$ une $F_\sigma$ de $\mathbb{R}$. Soit $F_n$ des fermés tels que $F = \cup_{n\geq 1} F_n$. On définit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } x \in F_n \cap \mathbb{Q} \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}), \\ -\frac{1}{n}, & \text{si } x \in F_n \setminus (\mathbb{Q} \cup F_1 \cup \cdots \cup F_{n-1}), \\ 0, & \text{si } x \notin F. \end{cases}$$

Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de $f$ est exactement $F$.
*Indication*. Pour montrer que $f$ est continue sur $F^c$, montrez que si $x_k \to x \in F^c$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que si $k \geq K$, on a que $x \notin F_1 \cup \cdots \cup F_n$.

**Exercice 9.** Montrer que si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f$ est uniformément continue.

**Exercice 10.** Soit $X \subseteq \mathbb{R}$ muni de la métrique $d_2$ et soit $f\colon (X, d_2) \to (\mathbb{R}, d_2)$ une fonction. Dans chaque cas, dire si la fonction est continue, uniformément continue, Lipschitz, une iséométrie ou rien de cela.

a) $X = [0,\infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$

b) $X = (0,1)$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$

c) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x$

d) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

e) $X = (0,\infty)$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

f)$^\dagger$ $X = (0,\infty)$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

**Exercice 11.** Soit $f, g\colon (X,d) \to (\mathbb{R}, d_2)$ deux fonctions.

a) Si $f$ et $g$ sont uniformément continues, alors est-ce que $f+g$ et $fg$ sont uniformément continue?

b) Si $f$ et $g$ sont Lipschitz, montrer que $f+g$ est Lipschitz, mais que $fg$ ne l'est pas nécessairement.

c) Si $f$ et $g$ sont des isométries, montrer que ni $f+g$, ni $fg$ ne sont nécessairement des isométries.

**Exercice 12.** Soit $f\colon (X,d) \to (Y,d')$ et $g\colon (Y,d') \to (Z,d'')$ deux fonctions, où $(X,d)$, $(Y,d')$ et $(Z,d'')$ sont des espaces métriques. Montrer que

a) si $f$ et $g$ sont uniformément continues, alors $g \circ f$ est uniformément continue;

b) si $f$ et $g$ sont Lipschitz, alors $g \circ f$ sont Lipschitz;

c) si $f$ et $g$ sont des isométries, alors $g \circ f$ est une isométrie.

**Exercice 13.** Montrer que la fonction de Cantor $\psi$ (voir l'exercice 6) n'est pas Lipschitz.

**Exercice 14.** On considère l'espace métrique $(C[a,b], d_1)$ et la fonction $T\colon C[a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $T(f) = \int_a^b |f|$. Est-ce que $T$ est continue, uniformément continue, Lipschitz, une isométrie ou rien de cela?

**Exercice 15.** (Théorème de Weierstrass) On considère $C[a,b]$ muni de la métrique $d_\infty$. Soit $\mathcal{P} = \{\text{polynômes}\} \subseteq C[a,b]$. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{P}$ est dense dans $(C[a,b], d_\infty)$.

a) Montrer que « $\mathcal{P}$ est dense dans $C[a,b]$ » est équivalent à « pour toute $f \in C[a,b]$, il existe une suite $(P_n)$ de $\mathcal{P}$ telle que $P_n \to f$ uniformément sur $[a,b]$ ».

b) Montrer que le résultat général suit du cas particulier où $a=0$, $b=1$ et $f(0)=0$ et $f(1)=0$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n(x) = c_n(1-x^2)^n$, où $c_n$ est l'unique constante positive telle que $\int_{-1}^1 Q_n = 1$. Montrer que $c_n < \sqrt{n}$.
*Suggestion*. Montrer d'abord que $(1-x^2)^n \geq (1-nx^2)$ sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$.

d) Déduire que pour chaque $\delta \in (0,1)$, on a que $Q_n \to 0$ uniformément sur $[\delta, 1]$. Conclure que $\int_\delta^1 Q_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$.

e) Soit $f \in C[0,1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Pour tout $x \in [-1,2] \setminus [0,1]$, on prolonge $f$ par $f(x) := 0$. Pour $x \in [0,1]$, on pose $P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t) Q_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $P_n$ est un polynôme.

f) Justifier le fait que $f$ est bornée est uniformément continue sur $[-1, 2]$.

g) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$ et $x \in [0, 1]$, alors $|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
*Suggestion.* Écrire $f$ comme une intégrale sur $[-1, 1]$, combiner les intégrales de $f$ et de $P_n$, puis scinder l'intervalle $[-1, 1]$ en $[-1, -\delta]$, $[-\delta, \delta]$ et $[\delta, 1]$.

**Exercice 16.** a) Trouver une fonction $f\colon (0, 1] \to \mathbb{R}$ continue et surjective.

b) Puisque $\mathbb{R}$ est ouvert, la fonction en a) est-elle un contre-exemple au théorème affirmant que $f^{-1}(\mathbb{R})$ est ouvert?

**Exercice 17.** Une fonction $f\colon (X, d) \to (Y, d')$ est dite ouverte si $f(U)$ est ouvert dans $Y$ pour chaque $U$ ouvert dans $X$. Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est ouverte et continue, alors $f$ est monotone.
*Suggestion.* Utiliser le fait qu'une fonction continue sur $[a, b]$ atteint son maximum.

**Exercice 18.** On suppose que $C[0, 1]$ est muni d'une métrique $d$. On définit $T\colon C[0, 1] \to \mathbb{R}$ par $T(f) = f(0)$. On pose $E = \{f \in C[0, 1] \mid f(0) = 1\}$.

a) $T$ est-elle continue si $d = d_\infty$?

b) $E$ est-il fermé si $d = d_\infty$?

c) $T$ est-elle continue sur $d = d_1$?

d) $E$ est-il fermé si $d = d_1$?

**Exercice 19.** Deux espaces métriques $(X, d)$ et $(Y, d')$ sont dits *isométriques* s'il existe une isométrie surjective de $X$ dans $Y$.

a) Montrer que s'il existe une isométrie surjective de $X$ dans $Y$, alors il en existe une de $Y$ dans $X$, ce qui justifie la définition précédente.

b) Montrer que $([0, 1], d_2)$ et $([0, 2], d_2)$ ne sont pas isométriques.

**Exercice 20.** Soit $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ une isométrie. Montrer que $f(x) = Ax + b$, où $A$ est une matrice $k \times k$ orthogonale et $b \in \mathbb{R}^k$ en suivant ces étapes. On suppose pour le moment que $f(0) = 0$.

a) Montrer que $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^k$.

b) Montrer que $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^k$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que $f(x) = Ax$, où $A$ est une matrice $k \times k$ orthogonale.

d) Déduire le résultat général, c'est-à-dire lorsque $f(0) = b \in \mathbb{R}^k$.

**Exercice 21.** Soit $(X, d)$, $(Y, d')$ et $(Z, d'')$ des espaces métriques. Soit $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ des homéomorphismes. Montrer que $g \circ f$ est un homéomorphisme.

**Exercice 22.** Soit $(X, d)$ et $(Y, d')$ des espaces métriques discrets. On suppose qu'il existe une bijection $f\colon X \to Y$.

a) Montrer que $X$ et $Y$ sont homéomorphes.

b) Montrer que si $X$ et $Y$ sont de plus uniformément discrets, alors ils sont uniformément homéomorphes.

**Exercice 23.** Montrer que la propriété « posséder exactement $n$ points isolés » est une propriété topologique.

**Exercice 24.** Soit $(X, d)$ et $(Y, d')$ des espaces métriques et $f\colon X \to Y$ un homéomorphisme. Montrer que pour tout $E \subseteq X$, on a $f(E') = f(E)'$.

**Exercice 25.** Soit $d$ et $d'$ des métriques sur $X$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

a) $d$ et $d'$ sont Lipschitz équivalentes;

b) il existe $A, B > 0$ telles que pour tout $x, y \in X$, on a $Ad'(x, y) \leq d(x, y) \leq Bd'(x, y)$.

c) il existe $C \geq 1$ telle que pour tout $x, y \in X$, on a $\frac{1}{C}d'(x, y) \leq d(x, y) \leq Cd'(x, y)$.

**Exercice 26.** Soit $(X, d)$ et $(Y, d')$ deux espaces métriques et soit $f\colon X \to Y$ un homéomorphisme. Pour tout $x, y \in X$, on définit $d''(x, y) := d'(f(x), f(y))$.

a) Montrer que $d''$ est une métrique sur $X$. b) Montrer que $d$ et $d''$ sont équivalentes.

**Exercice 27.** Déterminer si $d'(x, y) = |e^x - e^y|$ est équivalente, uniformément équivalente ou Lipschitz équivalente à $d_2$ sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 28.** Deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur un espace vectoriel $X$ sont équivalentes si l'identité $I\colon (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|')$ est un homéomorphisme. Soit $d$ et $d'$ les métriques induites par $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ respectivement. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

a) $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes;

b) $d$ et $d'$ sont équivalentes.

## Exercice supplémentaire

Cette section est optionnelle.

**Exercice 29.** Soit $(X, d)$ un espace métrique. La distance d'un point $x \in X$ à un ensemble $E \subseteq X$ non vide est définie par

$$\operatorname{dist}(x, E) = \inf_{y \in E} d(x, y).$$

a) Montrer que pour tout $E \subseteq X$, la fonction $x \mapsto \operatorname{dist}(x, E)$ est Lipschitz sur $X$ de constante 1.

b) Montrer que pour tout $E \subseteq X$, on a $x \in \overline{E}$ si et seulement si $\operatorname{dist}(x, E) = 0$.

c) Montrer que si $E$ est fermé dans $X$, alors $E$ est un $G_\delta$. Déduire que si $E$ est ouvert dans $X$, alors $E$ est un $F_\sigma$.

d) (Lemme d'Urysohn) Soit $E$ et $F$ des fermés disjoints de $X$. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : X \to [0, 1]$ telle que $f(x) = 0$ si et seulement si $x \in E$ et $f(x) = 1$ si et seulement si $x \in F$.

e) Montrer que le lemme d'Urysohn est faux si $E$ ou $F$ n'est pas fermé.

f) Montrer que la fonction $f$ du lemme d'Urysohn pourrait ne pasêtre uniformément continue.

g) (Normalité) Montrer que si $E$ et $F$ sont des fermés disjoints de $X$, alors il existe des ouverts $U$ et $V$ disjoints de $X$ tels que $E \subseteq U$ et $F \subseteq V$.