

Analyse 3

Série 1

Espaces métriques

Exercice 1. Déterminer si les fonctions $d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont des métriques sur \mathbb{R} .

a) $d(x, y) = (x - y)^2$

b) $d(x, y) = |x - 2y|$

c) $d(x, y) = \begin{cases} |\log |x - y||, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$

d) $d(x, y) = |x - y|^r$, où $r \in (0, \infty)$

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que pour tout $x, y, z \in X$, on a

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

Exercice 3. a) Soit (Y, d_Y) un espace métrique et soit $f: X \rightarrow Y$ une fonction. Montrer que $d_X(x, y) := d_Y(f(x), f(y))$ est une métrique sur X si et seulement si f est injective.

b) Déterminer si les fonctions $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ suivantes sont des métriques.

i) $X := \mathbb{R}$, $d(x, y) := |x^2 - y^2|$

ii) $X := (0, \infty)$, $d(x, y) := \min \left\{ 1, \max \left\{ \log\left(\frac{x}{y}\right), \log\left(\frac{y}{x}\right) \right\} \right\}$

iii) $X := \mathbb{R}^2$, $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) := |x_1 - y_1 + x_2 - y_2|$

Exercice 4. Soit $x = (x_1, \dots, x_k)^T \in \mathbb{R}^k$. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n(x, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sum_{j=1}^k |x_j|^n}$$

si cette limite existe. Correspond-elle à la définition de d_∞ donnée en classe, à savoir

$$d_\infty(x, 0) = \max_{1 \leq j \leq k} \{|x_j|\} ?$$

Exercice 5. Soit X un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Une **norme** sur X est une fonction $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, \infty)$ telle que pour tout $x, y \in X$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

- 1) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,
- 2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

On dit que $(X, \|\cdot\|)$ forme un *espace vectoriel normé* (ou simplement *espace normé*).

- a) (Métrique induite). Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. Montrer que la fonction $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$; $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ définie une métrique sur X , autrement dit que (X, d) forme un espace métrique. Cette métrique est *induite* par la norme.
- b) La structure d'espace normé est plus riche que la structure d'espace métrique (voir l'exercice 6, par exemple), car la norme est compatible avec la structure d'addition et de multiplication par un scalaire, mais la notion de métrique est plus souple. Montrer que $d(x, y) = |e^x - e^y|$ est une métrique sur \mathbb{R} et montrer que d n'est induite par aucune norme.
- c) (Norme induite). Soit X un espace vectoriel et soit d une métrique sur X . Montrer qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur X telle que $d(x, y) = \|x - y\|$ si et seulement si pour tout $x, y, z \in X$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|d(x, y) \quad \text{et} \quad d(x + z, y + z) = d(x, y).$$

Montrer que dans ce cas, on a $\|x\| = d(x, 0)$.

Exercice 6. Soit V un espace vectoriel. Un ensemble $X \subseteq V$ est dit *convexe* si pour tout $x, y \in E$, on a $D_{x,y} := \{(1-t)x + ty \mid t \in [0, 1]\} \subseteq E$. Ici, $D_{x,y}$ est le segment de droite entre les points x et y dans l'espace.

- a) Soit d une métrique sur V . Montrer que si d est induite par une norme (voir l'exercice 5), alors pour tout $a \in V$ et $r > 0$, la boule $B(a, r)$ est convexe.
- b) Trouver une métrique d sur \mathbb{R}^2 pour laquelle $B((1, 0), 2)$ n'est pas convexe.

Exercice 7. a) Soit $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{R}^k muni de la métrique d_∞ . Montrer que $x^{(n)} \rightarrow x$ dans (\mathbb{R}^k, d_∞) si et seulement si $x_i^{(n)} \rightarrow x_i$ (convergence usuelle dans \mathbb{R}) pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.

- b) Pour toute norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^k , montrer que $x^{(n)}$ converge vers x dans $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ si et seulement si $x_i^{(n)} \rightarrow x_i$ (convergence usuelle dans \mathbb{R}) pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.
Indice. Utilisez le a) et l'équivalence des normes sur \mathbb{R}^k .

Exercice 8. Soit $f, g \in C^1[0, 2\pi]$. On pose

$$d(f, g) := |f(\pi) - g(\pi)| + \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f'(x) - g'(x)|.$$

- a) Montrer que d est une métrique sur $C^1[0, 2\pi]$.
- b) Calculer, si elle existe, la limite des suites suivantes dans cet espace métrique.
- i) $f_n(x) = \sin(nx)$ ii) $f_n(x) = \cos(x/n)$ iii) $f_n(x) = \left| \frac{x-\pi}{\pi} \right|^{\frac{1+n}{n}}$

Exercice 9. Soit

$$\ell^\infty := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\},$$

l'ensemble des suites réelles bornées. On définit $d_\infty : \ell^\infty \times \ell^\infty \rightarrow [0, \infty)$ par

$$d_\infty(x, y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

- a) Montrer que d_∞ est une métrique sur ℓ^∞ et qu'elle provient d'une norme (qu'on note $\|\cdot\|_\infty$).
- b) On définit $c_0 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$ l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0. Montrer que c_0 est un sous-espace métrique de (ℓ^∞, d_∞) .

Exercice 10. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on pose $x^{(n)} := \left(\frac{n}{n+i}\right)_{i \in \mathbb{N}}$.

- a) Vérifier que $x^{(n)} \in \ell^\infty$ pour chaque n .
- b) Déterminer si $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (ℓ^∞, d_∞) .
- c) Montrer que $x^{(n)} \in c_0$ pour tout n .
- d) Déterminer si $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans (c_0, d_∞) .

Exercice 11. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $a \in X$ et $r > 0$. Montrer que $\dot{B}(a, r)$ est ouvert dans X .

Exercice 12. Soit (X, d) un espace métrique et soit $U \subset X$ un ouvert avec $U \neq X$. Montrer que si (x_n) est une suite de X qui converge vers $x \in U$, alors l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin U\}$ est fini.

Exercice 13. Peut-on trouver quatre ouverts U_1, \dots, U_4 de (\mathbb{R}, d_2) tels que $\bigcap_{n=1}^4 U_n = [0, \infty)$?

Exercice 14. Soit $d_1: C[0, 1] \times C[0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ définie par

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f - g|.$$

- a) Montrer que d_1 est une métrique.
- b) On pose $E = \{f \in C[0, 1] \mid f(0) \neq 0\}$. Montrer que $E^\circ = \emptyset$.

Exercice 15. Soit (X, d) un espace métrique et soit E, Y tels que $E \subseteq Y \subseteq X$. Montrer que E est ouvert dans (Y, d) si et seulement s'il existe un ouvert U de X tel que $E = Y \cap U$.

Exercice 16. Soit $X := \mathbb{R}^2$ et $Y := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ tous les deux munis de la métrique euclidienne d_2 . Vrai ou faux? Justifier.

- a) Y est fermé dans X .
- b) $E = \mathbb{R} \times \{0\}$ est fermé dans X .
- c) $E := \{(x, y) \in X \mid x^2 + y^2 = 1\}$ est fermé dans X .
- d) $E := \{(x, y) \in X \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ est fermé dans X .
- e) $E := \{(x, y) \in Y \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ est fermé dans Y .
- f) $E := \{(x, y) \in Y \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ est fermé dans X .
- g) $E := \{(x, y) \in X \mid xy = 1\}$ est fermé dans X .
- h) $E := ((0, 1] \times \mathbb{R}) \cup ((0, \infty) \times (\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}))$ est fermé dans Y .

Exercice 17. Soit (X, d) un espace métrique et soit $E \subseteq X$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. x est un point limite de E ;
2. chaque voisinage ouvert de x contient un point de E différent de x ;
3. chaque boule ouverte centrée en x contient une infinité de points de E ;
4. chaque voisinage ouvert de x contient une infinité de points de E ;
5. il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $E \setminus \{x\}$ telle que $x_n \rightarrow x$.

Exercice 18. Soit (X, d) un espace métrique et soit $E \subseteq X$. Montrer que x est un point isolé de E si et seulement s'il existe un voisinage ouvert V de x tel que $V \cap E = \{x\}$.

Exercice 19. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que pour tout $E \subseteq X$, E' est fermé.

Exercice 20. Donner un exemple d'ensemble E dans (\mathbb{R}, d_2) tel que

- a) $E' = \mathbb{Z}$
- b) $E \neq \emptyset$ et $E = E'$
- c) $(E')' \neq \emptyset$ et $(E')' \neq E'$.

Exercice 21. Montrer que si E_1, \dots, E_k sont fermés dans (\mathbb{R}, d_2) , alors $E := E_1 \times \dots \times E_k$ est fermé dans (\mathbb{R}^k, d_2) .

Exercice 22. On considère sur $C[0, 1]$ les métriques

$$d_1(f, g) = \int_0^1 |f - g| \quad \text{et} \quad d_\infty(f, g) = \sup_{[0,1]} |f - g|.$$

Soit $E := \{f \in C[0, 1] \mid f(0) = 1\}$.

- a) Montrer que E est fermé par rapport à d_∞ .
- b) Montrer que E n'est pas fermé par rapport à d_1 .

Exercice 23. Est-ce que c_0 est fermé dans (ℓ^∞, d_∞) ? (Voir l'exercice 9.)

Exercice 24. Soit (X, d) un espace métrique.

- a) Montrer qu'une intersection dénombrable d'ensembles G_δ est un G_δ . De même, montrer qu'une union dénombrable d'ensembles F_σ est un F_σ .
- b) Montrer que E est un G_δ si et seulement si $X \setminus E$ est un F_σ .
- c) Montrer que (a, b) , $(a, b]$ et $[a, b]$ sont des F_σ et G_δ dans (\mathbb{R}, d_2) .
- d) Montrer que l'union des droites passant par l'origine et de pentes rationnelles est un F_σ dans (\mathbb{R}^2, d_2) .
- e)* Montrer que \mathbb{Q} est un F_σ dans (\mathbb{R}, d_2) , mais qu'il n'est pas un G_δ .

* Ce numéro est optionnel.

Exercice 25. Soit (X, d) un espace métrique et $E, F, E_1, E_2, \dots \subseteq X$. Montrer que

- a) $\overline{E^c} = (E^\circ)^c$
- b) E est ouvert $\Leftrightarrow E^\circ = E \Leftrightarrow \partial E \cap E = \emptyset$
- c) $E^\circ = E \setminus \partial E$
- d) X est l'union disjointe des ensembles deux à deux disjoints E° , ∂E et $(E^c)^\circ$
- e) E est ouvert et fermé si et seulement si $\partial E = \emptyset$
- f) $\partial E = \partial(E^c)$

- g) si $E \subseteq F$, alors $\overline{E} \subseteq \overline{F}$, $E^\circ \subseteq F^\circ$ et $E' \subseteq F'$, mais que la réciproque est fausse
- h) $E \subseteq F$ n'implique pas que $\partial E \subseteq \partial F$
- i) $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$
- j) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$ et que l'inclusion peut être stricte
- k) $E^\circ \cup F^\circ \subseteq (E \cup F)^\circ$ et que l'inclusion peut être stricte
- l) $E' \cup F' \subseteq (E \cup F)'$
- m) $\bigcup_{n=1}^{\infty} E'_n \subseteq \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right)'$ et que l'inclusion peut être stricte
- n) $\partial(E \cup F) \subseteq \partial E \cup \partial F$ et que l'inclusion peut être stricte
- o) $\overline{E \cap F} \subseteq \overline{E} \cap \overline{F}$ et que l'inclusion peut être stricte
- p) $E^\circ \cap F^\circ = (E \cap F)^\circ$
- q) $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right)^\circ \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n^\circ$ et que l'inclusion peut être stricte
- r) $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$
- s) $(E^\circ)^\circ = E^\circ$
- t) $(E')' \subseteq E'$ et que l'inclusion peut être stricte
- u) $\partial(\partial E) \subseteq \partial E$ et que l'inclusion peut être stricte
- v) $\partial(\partial(\partial E)) = \partial(\partial E)$.

Exercice 26. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. E est dense dans X ;
2. pour tout $x \in X$, il existe (x_n) dans E telle que $x_n \rightarrow x$;
3. pour tout $x \in X$, pour tout $r > 0$, on a $B(x, r) \cap E \neq \emptyset$.

Exercice 27. Montrer que l'intersection de deux ensembles denses dans un espace métrique n'est pas nécessairement dense dans cet espace.

Exercice 28. Soit U_n , $n = 1, 2, \dots$, des ouverts denses de (\mathbb{R}, d_2) . Montrer que $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ est dense dans \mathbb{R} .

Exercice 29. Soit $w \in C[a, b]$ telle que $w \geq 0$ sur $[a, b]$. Pour $f, g \in C[a, b]$, on définit

$$d_w(f, g) = \int_a^b |f - g|w.$$

Montrer que d_w est une métrique sur $C[a, b]$ si et seulement si $Z := \{x \in [a, b] \mid w(x) = 0\}$ est nulle part dense dans $[a, b]$.

Exercice 30. Soit (X, d) un espace métrique. Un sous-ensemble $E \subseteq X$ est dit *parfait* si $E' = E$.

- a) Montrer que $[0, 1]$ est parfait dans (\mathbb{R}, d_2) .
- b) Montrer que E est parfait si et seulement si E ne possède pas de point isolé.

Exercices supplémentaires

Cette section est optionnelle.

Exercice 31. Montrer qu'un ensemble parfait non vide de (\mathbb{R}, d_2) est indénombrable. (Voir l'exercice 30.)

Exercice 32. (Ensemble de Cantor) On pose $C_0 = [0, 1]$. On construit C_n ($n \geq 1$) en retranchant du milieu de chaque intervalle de C_{n-1} un intervalle ouvert de longueur 3^{-n} . On peut vérifier que C_n est formé de la réunion de 2^n intervalles fermés disjoints tous de longueur 3^{-n} . L'*ensemble de Cantor* est la limite des C_n , c'est-à-dire $C := \bigcap_{n \geq 0} C_n$. Pour la suite, on considère la métrique euclidienne sur \mathbb{R} et la métrique induite sur C .

- a) Montrer que C est fermé.
- b) Montrer que $C^\circ = \emptyset$.
- c) Montrer que C est nul part dense.
- d) Montrer que C est parfait. Dédurre que C est indénombrable.
- e) On pose

$$E_n = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{3^k} \mid x_k \in \{0, 2\} \right\}.$$

Montrer que $E_n \subseteq C$. Plus précisément, montrer que E_n est l'ensemble des $x \in [0, 1]$ tels que x est l'extrémité gauche d'un intervalle de C_n .

- f) Montrer que

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid x_n \in \{0, 2\} \right\},$$

c'est-à-dire que C est l'ensemble des nombres de $[0, 1]$ dont le développement ternaire (en base 3) ne contient que des 0 ou des 2.

(Remarquez que $\bigcup_{n \geq 1} E_n \subseteq C$, mais que $C \neq \bigcup_{n \geq 1} E_n$. Expliquez pourquoi il n'y a pas de contradiction.)