EXERCICES DE LA SÉRIE #6

#13 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et 0 sinon.

(a) MQ f est continue.

f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, car c'est le quotient de deux polynômes continus.

f est continue en $(0,0)$: soit $\varepsilon > 0$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.q. $d((x,y),(0,0)) < \varepsilon$. Alors en particulier $|x| \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < \varepsilon$.

On a $d(f(x,y), f(0,0)) = \left| \frac{x^3}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{|x^3|}{x^2+y^2} = 0$ si $x = 0$.

Sinon, $d(f(x,y), f(0,0)) = \frac{|x|^3}{x^2+y^2} \leqslant \frac{|x|^3}{x^2} = |x| < \varepsilon$.

Donc f est continue en $(0,0)$ aussi.

(b) Soit $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ dérivable en 0 telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) \neq (0,0)$. MQ $f \circ \varphi$ est dérivable en 0 et calculer $(f\circ\varphi)'(0)$.

Posons $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$. Alors $f\circ\varphi(x) = \frac{\varphi_1(x)^3}{\varphi_1(x)^2 + \varphi_2(x)^2}$.

On a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\circ\varphi(0+h) - f\circ\varphi(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\varphi_1(h)^3}{\varphi_1(h)^2+\varphi_2(h)^2} - 0 \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1/h^3}{1/h^2} \left(\frac{\varphi_1(h)^3}{\varphi_1(h)^2+\varphi_2(h)^2} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\left(\frac{\varphi_1(h)}{h}\right)^3}{\left(\frac{\varphi_1(h)}{h}\right)^2 + \left(\frac{\varphi_2(h)}{h}\right)^2} \right)$$

$$= \frac{(\varphi_1'(0))^3}{\underbrace{(\varphi_1'(0))^2 + (\varphi_2'(0))^2}_{\neq 0}} \in \mathbb{R}$$

(c) MQ $f_x(0)$ et $f_y(0)$ existent et les calculer.

On a

$$f_x(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2 - 0}{h} = 1.$$

$$f_y(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

(d) MQ f n'est pas dérivable en $(0,0)$.

Si f était dérivable en $(0,0)$, on aurait $f'(0,0) = J_f(0,0)$ $= (1 \;\; 0)$ par le (c). Or,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left| f(h,h) - f(0,0) - (1 \;\; 0)\binom{h}{h} \right|}{\|(h,h)\|}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left| \frac{h^3}{2h^2} - h \right|}{\sqrt{2h^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}|h|}{\sqrt{2}\,|h|} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \neq 0,$$

d'où $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\left| f(x,y) - f(0,0) - J_f(0,0)\binom{x}{y} \right|}{\|(x,y)\|} \neq 0$ et f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

#14 Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(u,v) = (u, ve^u, ue^v) \quad \text{et} \quad g(x,y,z) = xz + yz + x.$$

On pose $h := g \circ f$. Calculer $h'(1,0)$.

Calculons les dérivées partielles de f et g :

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}(u,v) = 1 \qquad \frac{\partial f_1}{\partial v}(u,v) = 0 \qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = z+1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u}(u,v) = ve^u \qquad \frac{\partial f_2}{\partial v}(u,v) = e^u \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = z$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u}(u,v) = e^v \qquad \frac{\partial f_3}{\partial v}(u,v) = ue^v \qquad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = x+y$$

Alors les matrices jacobiennes de f et g sont

$$\underbrace{J_f(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ve^u & e^u \\ e^v & ue^v \end{pmatrix}}_{\text{chacune des composantes est une fonction continue } \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}} \quad \text{et} \quad J_g(x,y,z) = \underbrace{\begin{pmatrix} z+1 & z & x+y \end{pmatrix}}_{\text{chacune des composantes est une fonction continue } \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}.}$$

Elles sont toutes les deux continues, sur tout $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement, d'où f et g sont dérivables en tout point.

Par la règle de dérivée en chaîne, on a alors

$$\begin{aligned} h'(1,0) = (g \circ f)'(1,0) &= g'(f(1,0)) \circ f'(1,0) \\ &= J_g(1,0,1) \cdot J_f(1,0) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ e+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#15 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\|f(x)\| = 1$. MQ $f(x)^t f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Soit $\bullet : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : x \bullet y \mapsto x^t y$. Alors $\bullet$ est le produit scalaire habituel sur $\mathbb{R}^n$, qui est bilinéaire. Comme f est dérivable, la fonction $f \bullet f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'est aussi et $\forall h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(f \bullet f)'(x)\, h &= f'(x)\, h \bullet f(x) + f(x) \bullet f'(x)\, h \\ &= (f'(x)\, h)^t f(x) + f(x)^t (f'(x)\, h) \\ &= 2\, f(x)^t f'(x) h \\ &= 2h\, f(x)^t f'(x) \qquad (*)\end{aligned}$$

Or, $(f \bullet f)(x) = f(x)^t f(x) = \|f(x)\|^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, d'où la fonction $f \bullet f$ est constante et $(f \bullet f)'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Alors $(*)$ donne $0 = 2h f(x)^t f'(x) \Rightarrow f(x)^t f'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

#16 Pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$, on pose $x(r,\theta) = r\cos\theta$ et $y(r,\theta) = r\sin\theta$, les coordonnées polaires.

(a) MQ $z(r,\theta) := \begin{pmatrix} x(r,\theta) \\ y(r,\theta) \end{pmatrix}$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^2$ et calculer $z'(r,\theta)$.

Calculons sa matrice jacobienne :

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta & \frac{\partial x}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta \\ \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) = \sin\theta & \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) = r\cos\theta \end{array}\right\} J_z(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

Chacune des composantes de $J_z(r,\theta)$ est continue sur tout $\mathbb{R}^2$, d'où z est dérivable et $z'(r,\theta) = J_z(r,\theta)$.

(b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $g(r,\theta) = f(x(r,\theta), y(r,\theta))$. Calculer $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

On a $g = f \circ z$, d'où la règle de dérivation en chaîne donne $g'(r,\theta) = f'(z(r,\theta)) \circ z'(r,\theta)$.

On a alors

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) \quad \frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) \right) &= J_g(r,\theta) = J_f(z(r,\theta)) \cdot J_z(r,\theta) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \right) \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta \, \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta \, \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ -r\sin\theta \, \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta \, \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta) \end{pmatrix}^t \end{aligned}$$

#17 Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in U$. Calculer $\nabla(\frac{1}{f})(a)$ si $f(a) \neq 0$.

Soit $h : U \to \mathbb{R} : x \mapsto 1$. Alors $h'(x) = (0, 0, \dots, 0)$ $\forall\, x \in U$.

Par la règle du produit (#9), on sait que

$$0 = (h)'(a) = \left(\frac{1}{f} \cdot f\right)'(a) = f(a)\left(\frac{1}{f}\right)'(a) + \frac{1}{f(a)} f'(a)$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{1}{f(a)^2} f'(a)$, c'est-à-dire que

$$\nabla\left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{1}{f(a)^2} \nabla f(a).$$

#21 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(\|x\|)$. MQ $|f(x) - f(y)| \leqslant \|x-y\| \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$.

Posons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \arctan(x)$. Alors $|g'(x)| = \left|\frac{1}{1+x^2}\right| \leqslant 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Ainsi, le TVM donne $|\arctan(x) - \arctan(y)| \leqslant |x-y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

En particulier, étant donné $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$|\arctan(\|x\|) - \arctan(\|y\|)| \leqslant |\|x\| - \|y\|| \leqslant |\|x-y\|| = \|x-y\|,$$

tel que désiré. $\square$

EXERCICES DE LA SÉRIE #7

#2 Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction. MQ si les $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existent et sont bornées dans un voisinage de $x \in U$, alors f est continue en x.

Soit $r > 0$. Posons $M = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sup\limits_{z \in B(x,r)} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j}(z) \right\|$. On a alors, $\forall h \in \mathbb{R}^n$ t.q. $x + h \in B(x,r)$,

$$\begin{aligned}
\|f(x+h) - f(x)\| &= \|f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) - f(x_1, \dots, x_n)\| \\
&= \|f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) - f(x_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) \\
&\quad + f(x_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) - f(x_1, x_2, x_3+h_3, \dots, x_n+h_n) \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n+h_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\| \\
&\leq \|f(x_1+h_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n) - f(x_1, x_2+h_2, \dots, x_n+h_n)\| \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \|f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n+h_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\| \\
&\leq M\|(h_1, 0, \dots, 0)\| + \cdots + M\|(0, \dots, 0, h_n)\| \\
&= M \sum_{i=1}^{n} \|h_i\| \longrightarrow 0 \text{ lorsque } h \to 0.
\end{aligned}$$

théorème de la val. moyenne appliqué aux fonctions $f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, x_j, \dots, \hat{x}_n)$ de dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_j}$

valeurs fixées

#5 Pour chacune des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ suivantes, déterminer
i) en quels points de $\mathbb{R}^2$ elle est localement inversible
ii) si elle possède un inverse global sur $\mathbb{R}$.

(a) $f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)^t$

On a $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, qui est continue sur tout $\mathbb{R}^2$, d'où f est dérivable et de classe C^1 partout. Elle est donc inversible localement en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si $J_f(x,y)$ est inversible, ssi $\det(J_f(x,y)) \neq 0$. On a

$$\det(J_f(x,y)) = 4x^2 + 4y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0),$$

d'où f est inversible localement (et est un C^1-difféomorphisme local) partout sauf en 0.

Soit $B = B(0,r)$. On a $f(\frac{r}{2},0) = (\frac{r^2}{4},0)^t = f(-\frac{r}{2},0)$, d'où f n'est pas injective sur $B(0,r)$. Comme r est arbitraire, on conclut qu'il n'existe pas de voisinage ouvert de 0 sur lequel f est inversible, car f n'y est pas injective.

#6 On pose $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2+y^2 < 2\}$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$.

(a) En quels points de U f est-elle localement inversible?

Calculons $J_f(x,y)$: on a

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{2x\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2-y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x}{(x^2+y^2)}$$

$$= \frac{2x(x^2+y^2) - x^3 + y^2 x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{x^3+3y^2x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \cdots = \frac{-3x^2y - y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \cdots = \frac{2y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = \cdots = \frac{2x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

d'où

$$J_f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x^3+3y^2x & -3x^2y - y^3 \\ 2y^3 & 2x^3 \end{pmatrix}$$

Alors $J_f(x,y)$ est bien définie et continue sur U, donc f est de classe C^1. On a

$$\det(J_f(x,y)) = \left(\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right)^2 \underbrace{(2x^6+6y^2x^4+6x^2y^4+2y^6)}$$

$$= 2(x^6+3y^2x^4+3x^2y^4+y^6)$$

$$= 2\left(x^2(x^4+2y^2x^2+y^4) + y^2(x^4+2x^2y^2+y^4)\right)$$

$$= 2(x^2+y^2)(x^2+y^2)^2$$

$$= \frac{2(x^2+y^2)^3}{(x^2+y^2)^3} = 2$$

Donc $J_f(x,y)$ est inversible $\forall (x,y) \in U$, d'où f est un

C^1-difféomorphisme local sur U par le théorème d'inversion locale.

(b) Soit $b := f(\frac{3}{2}, 0)$. Calculer $(f^{-1})'(b)$.

Par le théorème d'inversion locale et les calculs du (a), on a que $(f^{-1})'(b) = (f'(\frac{3}{2},0))^{-1}$, et $J_f(\frac{3}{2},0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors $(f^{-1})'(b) = (J_f(\frac{3}{2},0))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(c) Calculer $V := f(U)$.

C'est plus facile à voir en passant aux coordonnées polaires. Posons donc $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ pour $(r,\theta) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi)$. On a alors $U = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 1 < r < \sqrt{2}\}$, et

$$f(x(r,\theta), y(r,\theta)) = \begin{pmatrix} r^2((\cos^2\theta - \sin^2\theta) \cdot \frac{1}{r} \\ 2r^2 \cos\theta \sin\theta \cdot \frac{1}{r} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{pmatrix}$$

Donc $f(U) = \{(r\cos 2\theta, r\sin 2\theta) \mid 1 < r < \sqrt{2}\}$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\} = U$.

(d) La fonction possède-t-elle un inverse global de V sur U?

Non, car f n'est pas injective. Par exemple, $\forall (x,y) \in U$, $(-x,-y) \in U$ et $f(x,y) = f(-x,-y)$.

#10 Soient $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ ouverts, $f : U \to V$ un homéomorphisme et $a \in U$. On pose $b = f(a)$ et $g = f^{-1}$ et on suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) \in M_n^{-1}$.

(a) Pour k dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$, on pose $h(k) = g(b+k) - g(b)$. MQ $\exists \delta > 0$ et $C > 0$ t.q. si $\|k\| < \delta$, alors $\|h(k)\| \leqslant C\|k\|$.

On a $h(k) = g(b+k) - g(f(a)) = g(b+k) - a \Leftrightarrow h + a = g(b+k)$

$$\Leftrightarrow f(a+h) = b+k$$

$$\Leftrightarrow k = f(a+h) - f(a)$$

Comme f est dérivable en a,

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + r(h) \quad \text{où} \quad \lim_{h \to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$$

Alors

$$h = (f'(a))^{-1}\big(f(a+h) - f(a) - r(h)\big) = (f'(a))^{-1}(k - r(h)),$$

d'où

$$\|h(k)\| = \|f'(a)^{-1}\|\big(\|k - r(h)\|\big) \leqslant \|f'(a)^{-1}\|\big(\|k\| + \|r(h)\|\big) \quad (\star)$$

Soit $\varepsilon > 0$ t.q. $\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} < \frac{1}{2\|f'(a)^{-1}\|}$ lorsque $\|h\| < \varepsilon$.
Lorsque $k \to 0$, on a $h = g(b+k) - g(b) \to 0$ par continuité de g. Alors $\exists \delta > 0$ t.q. $\|k\| < \delta \Rightarrow \|h\| < \varepsilon$.
Dans ce cas, $\|r(h)\| \cdot \|f'(a)^{-1}\| < \frac{1}{2}\|h\|$, d'où

$$\|h\| - \frac{1}{2}\|h\| < \|h(k)\| - \|r(h)\| \cdot \|f'(a)^{-1}\| \underset{(\star)}{\leqslant} \|f'(a)^{-1}\| \cdot \|k\|,$$

c-à-d $\|h\| < C \cdot \|k\|$ avec $C = 2\|f'(a)^{-1}\|$ dès que $\|k\| < \delta$.

(b) Déduire que g est dérivable en b et que $g'(b) = f'(a)^{-1}$.

On a alors

$$\lim_{k \to 0} \frac{\| g(b+k) - g(b) - (f'(a)^{-1})k \|}{\|k\|} = \lim_{k \to 0} \frac{\| f'(a)^{-1} (f'(a) \cdot h - k) \|}{\|k\|}$$

$$\leqslant \lim_{k \to \infty} \| f'(a)^{-1} \| \cdot \frac{\| f'(a) \cdot h - [f(a+h) - f(a)] \|}{\|k\|}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \| f'(a)^{-1} \| \cdot \underbrace{\frac{\| f(a+h) - f(a) - f'(a) \cdot h \|}{\|h\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\|h\|}{\|k\|}}_{\leqslant C}$$

$$= 0,$$

donc g est dérivable en b et $g'(b) = f'(a)^{-1}$.

#12 On considère dans $\mathbb{R}^2$ la courbe C d'équation $xe^y + ye^x = 0$, où $x, y \in \mathbb{R}^2$.

(a) MQ $\exists$ un voisinage U de l'origine et une fonction $f: U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 t.q. $(x, f(x)) \in C \ \forall x \in U$.

Posons $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto xe^y + ye^x$. Alors F est de classe C^1 ($\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = e^y + ye^x$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = xe^y + e^x$ sont continues).

On a $F(0,0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0 \cdot e^0 + e^0 = 1 \in M_1^{-1}$, d'où par le théorème des fonctions implicites $\exists U$ un voisinage ouvert de 0 et $f: U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 t.q. $F(x, f(x)) = 0 \ \forall x \in U \Leftrightarrow (x, f(x)) \in C \ \forall x \in U$.

(b) Quelle est l'équation de la tangente à C en $(0,0)$?

Le vecteur tangent à C en $(0,0)$ est donné par $(1, g'(0))$. Le théorème des fonctions implicites donne $g'(0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = -1^{-1} \cdot 1 = -1$. Donc la droite tangente a comme vecteur directeur $(1,-1)$, d'où elle est d'équation $y = -x$.

(c) MQ il existe un unique point où la tangente est horizontale et calculer son abscisse.

On peut appliquer le thm des fcts implicites en tout $(x,y) \in C$ t.q. $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$. Dans ce cas, la tangente à C est de pente $-\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -(e^x + xe^y)^{-1} \cdot (ye^x + e^y)$.

Cette pente est nulle ssi $ye^x + e^y = 0$. Comme on a aussi $ye^x + xe^y = 0$, on peut soustraire les deux pour obtenir $(x-1)e^y = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ceci est l'abscisse du point cherché.

Reste à vérifier les points où le thm ne s'applique pas.

Notons que $(x,y) \in C$ vérifie $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0$ ssi

$$xe^y + ye^x = 0 \;\;\&\;\; xe^y + e^x = 0 \Rightarrow (y-1)e^x = 0$$
$$\Rightarrow y = 1$$

Par symétrie de l'équation définissant C, on sait que ce point correspond à celui où la pente est une droite verticale (on peut appliquer le thm des fcts implicites pour obtenir x en fonction de y, et on obtient une pente nulle de (x en fct de y) de façon analogue à la démarche ci-haut.)

#13 On considère la surface $S \subseteq (0,\infty)^3$ définie par
$2x^2z + \log(xyz) + 7 = y^3$.

(a) MQ $\exists$ un unique point de la forme $(1,2,z_0)$ et calculer z_0.

Si $x=1$, $y=2$, l'équation de S devient $2z + \log(2z) = 1$ $(*)$

Une solution est donnée par $z_0 = \frac{1}{2}$.

Posons $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : x \mapsto x + \log(x) - 1$. Alors f est dérivable et si f a deux zéros, $\exists c \in \mathbb{R}_{>0}$ t.q. $f'(c) = 0$ par Rolle.

Or $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}_{>0}$, d'où f a au maximum un zéro. Comme les zéros de f sont en correspondance biunivoque avec les solutions de $(*)$, on conclut que $z_0 = \frac{1}{2}$ est bien la seule.

(b) MQ $\exists\, U$ un voisinage ouvert de $(1,2)$ et une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 t.q. $\forall (x,y) \in U$ et $\forall z > 0$, on a $(x,y,z) \in S \Leftrightarrow z = f(x,y)$.

Posons $F : (0,\infty)^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \mapsto 2x^2z + \log(xyz) + 7 - y^3$.

On a $F(1,2,\frac{1}{2}) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(1,2,\frac{1}{2}) = 2x^2 + \frac{xy}{xyz}\Big|_{(x,y)=(1,2)} = 4$, qui est inversible.

Alors on peut appliquer le théorème des fonctions implicites et on obtient un voisinage U de $(1,2)$ et une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 t.q. $(x,y,z) \in S \Leftrightarrow F(x,y,z) = 0$

$\Leftrightarrow z = f(x,y)$

$\forall (x,y) \in U$ et $\forall z$ dans un voisinage V de $\frac{1}{2}$.

On a montré : $\forall (x,y) \in U$ et $\forall z > 0$, $z = f(x,y) \Rightarrow (x,y,z) \in S$.

$(\Rightarrow)$ Notons $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} : z \mapsto 2x^2z + \log(xyz) + 7 - y^3$.

Alors $g'(z) = 2x^2 + \frac{1}{z} > 0$ dès que $x > 0$ et $z > 0$.
Autrement dit, quitte à restreindre le voisinage trouvé ci-haut pour que $x > 0$ $\forall (x,y) \in U$, $\exists ! \, z \in \mathbb{R}_{>0}$ t.q. $F(x,y,z) = 0$ (par le même argument qu'au (a)) et ce z est donné par $f(x,y)$.

(c) Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)$.

Le théorème des fonctions implicites donne

$$\begin{aligned}
f'(1,2) &= -\left(\frac{\partial F}{\partial z}\left(1,2,\tfrac{1}{2}\right)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial (x,y)}\left(1,2,\tfrac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{1}{4} \cdot \left(4xz + \frac{1}{x} \quad \frac{1}{y} - 3y^2\right)\Big|_{(x,y,z)=(1,2,\frac{1}{2})} \\
&= \left(\frac{-3}{4} \quad \frac{23}{8}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{-3}{4}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{23}{8}$.

#14 On suppose que $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0)$ est une solution du système
$$\begin{cases} 3x + 2y + z^2 + u^3 + u + v^2 = -1, \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w = 10, \\ x + 3z^2 + w + u^2 = 0. \end{cases}$$

(a) MQ il existe un voisinage ouvert de (x_0, y_0, z_0) et des fcts dérivables u, v, w de (x, y, z) définies sur ce voisinage qui résolvent ce système.

Posons $F : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z, u, v, w) \longrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 2y + z^2 + u^3 + u + v^2 + 1 \\ 4x + 3y + z + u^2 + v + w - 10 \\ x + 3z^2 + w + u^2 \end{pmatrix}$

Alors F est de classe C^1 et $F(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0) = 0$. On a
$$\frac{\partial F}{\partial(u,v,w)}(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0) = \begin{pmatrix} 3u_0^2 + 1 & 2v_0 & 0 \\ 2u_0 & 1 & 1 \\ 2u_0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
dont le déterminant est
$$3u_0^2 + 1 - 2v_0(2u_0 - 2u_0) = 3u_0^2 + 1 > 0$$
Donc $\frac{\partial F}{\partial(u,v,w)}(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0)$ est inversible et on peut appliquer le théorème des fonctions implicites pour obtenir un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de (x_0, y_0, z_0) et des fonctions $u, v, w : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ t.q. $F(x, y, z, u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)) = 0$ $\forall (x,y,z) \in \mathcal{U}$, c-à-d que c'est une solution du système.

(b) MQ il existe un voisinage ouvert de (u_0, v_0, w_0) et des fcts dérivables x, y, z de (u,v,w) définies sur ce voisinage qui résolvent ce système.

On a $\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2z_0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6z_0 \end{pmatrix}$

dont le déterminant est

$$1(2\cdot 1 - 3\cdot 2z_0) + 6z_0(3\cdot 3 - 4\cdot 2) = 2 \neq 0$$

Donc $\frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0)$ est inversible et on peut appliquer le théorème des fonctions implicites pour obtenir un voisinage ouvert U' de (u_0, v_0, w_0) et des fonctions $x, y, z : U \to \mathbb{R}$ t.q. $F(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w), u, v, w) = 0$ $\forall (u,v,w) \in U'$, c-à-d que c'est une solution du système.

(c) Calculer $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}(x_0, y_0, z_0)$ dans le cas particulier $(x_0, y_0, z_0) = (0, 4, 1)$.

Si $(x_0, y_0, z_0) = (0, 4, 1)$, alors

$$\begin{cases} 8 + 1 + u^3 + u + v^2 = -1 \\ 12 + 1 + u^2 + v + w = 10 \\ 3 + w + u^2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow u^3 + u = -10 \Rightarrow u = -2$

$10 + v = 10 \Rightarrow v = 0$

$\Downarrow$ $w = -7$

Le théorème des fonctions implicites donne

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}(x_0, y_0, z_0) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(u,v,w)}(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial(x,y,z)}(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0)$$

$$= -\begin{pmatrix} 3(-2)^2 + 1 & 2\cdot 0 & 0 \\ 2(-2) & 1 & 1 \\ 2(-2) & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 1/13 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 4/13 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3/13 & -2/13 & -2/13 \\ -3 & -3 & 5 \\ -25/13 & -8/13 & -86/13 \end{pmatrix}$$

Exercice 18. Soit $W_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ et $W_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ des ouverts. Soit $f\colon W_1 \times W_2 \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe C^1 des variables $(x,y) \in W_1 \times W_2$. Pour $a \in W_1$, on pose $E(a) := \{b \in W_2 \mid f(a,b) = 0\}$.

a) Soit $a_0 \in W_1$ un point, U un voisinage ouvert de a_0 et K un compact de W_2 tels que

$$|E(a_0)| \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \bigcup_{a \in U} E(a) \subseteq K \subseteq W_2.$$

Montrer que si $\frac{\partial f}{\partial y}(a_0, b)$ est inversible pour tout $b \in E(a_0)$, alors $|E(a)| = |E(a_0)|$ pour tout a dans un voisinage ouvert de a_0.

b) Montrer que pour $W_1 = W_2 = \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y^2 - xy^3 + y - x$ et $a_0 = 0$, la conclusion du a) est fausse. Quelles sont les hypothèses du a) qui ne sont pas satisfaites?

Remarque. La partie a) montre que sous certaines hypothèses, le nombre de solutions $y(x)$ satisfaisant $f(x, y(x)) = 0$ au voisinage de $x = a_0$ est constant.

(a) Posons $E(a_0) = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$. Comme f est de classe C^1 et $\frac{\partial f}{\partial y}(a_0, b_i)$ est inversible $\forall i = 1, \dots, k$, $\exists\, U_i$ des voisinages de a_0, V_i des voisinages de b_i et $g_i : U_i \to V_i$ de classe C^1 t.q. $f(a,b) = 0 \Leftrightarrow b = g_i(a)$ $\forall a \in U_i$, $b \in V_i$, par le théorème des fonctions implicites.
Comme les b_i sont distincts et par continuité des g_i, on peut prendre des U_i t.q. les V_i sont disjoints.
On obtient, en posant $\tilde{U} = U_1 \cap \dots \cap U_k$, $\forall a \in \tilde{U}$, $f(a, \underbrace{g_i(a)}_{\text{tous distincts car les } V_i \text{ sont disjoint}}) = 0$ $\forall i$, d'où $|E(a)| \geq k = |E(a_0)|$.

Supposons que $\forall$ voisinage ouvert U' de a_0, $\exists\, a \in U'$ t.q. $|E(a)| > |E(a_0)|$.

Soit $r > 0$ t.q. $B(a_0, r) \subseteq U$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists\, a_n \in B(a_0, \frac{r}{n})$ et $|E(a_n)| > |E(a_0)|$. Nécessairement, $\exists$ $c_n \in E(a_n)$ t.q. $c_n \notin V_i$, $1 \leq i \leq k$. Alors la suite $\{(a_n, c_n)\} \subseteq B(a_0, r) \times \bigcup_{a \in U} E(a) \subseteq \overline{B(a_0, r)} \times K$, qui est

compact. Alors $\exists$ une sous-suite (a_{n_k}, c_{n_k}) qui converge, disons vers (a^*, c^*). Par construction, on a $a^* = a_0$. Aussi, comme $F(a_{n_k}, c_{n_k}) = 0 \ \forall k$, $\lim_{k\to\infty} F(a_{n_k}, c_{n_k}) = F(a_0, c^*) = 0$ par continuité.
Or, comme $c_{n_k} \notin V_i \ \forall 1 \leq i \leq k$, $c^* = \lim_{k\to\infty} c_{n_k} \notin V_i$, d'où $c^* \notin E(a_0)$, ce qui contredit $F(a_0, c^*) = 0$. ※
Donc $\exists$ un voisinage ouvert de a_0 t.q. $|E(a)| = |E(a_0)|$ $\forall a \in U$.

(b)

On a $f(x,y) = x^2y^2 - xy^3 + y - x = (x-y)(xy^2-1)$, qui a comme racines (en y et pour x fixé) $y = x$ et $y = \frac{\pm 1}{\sqrt{x}}$. Ainsi, pour $a_0 = 0$ et $a > 0$ dans un voisinage de a_0, on a $E(a) = \{a, \frac{\pm 1}{\sqrt{a}}\}$. Comme $\lim_{a\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{a}} = \infty$, on conclut que $\bigcup_{a \in U} E(a)$ n'est pas borné, donc

voisinage de 0

pas contenu dans un compact.

#24 Trouver dans $\mathbb{R}^3$ le minimum et le maximum de la fonction $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sous la contrainte $x^2+2y^2 = z^2+1$.

Posons $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : (x,y,z) \to x^2+2y^2-z^2-1$. Alors g est de classe C^1 et $g'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & -2z \end{pmatrix}$, qui est de rang 1 $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Posons $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$

$$= x^2+y^2+z^2 - \lambda x^2 - \lambda 2y^2 + \lambda z^2 + \lambda$$

$$= (1-\lambda)x^2 + (1-2\lambda)y^2 + (1+\lambda)z^2 + \lambda$$

Alors $\frac{\partial L}{\partial(x,y,z)}(x,y,z,\lambda) = \begin{pmatrix} (2-2\lambda)x & (2-4\lambda)y & (2+2\lambda)z \end{pmatrix}$.

Selon le théorème de Lagrange si (x_0,y_0,z_0) satisfait $g(x_0,y_0,z_0) = 0$ (en particulier $(x_0,y_0,z_0) \neq (0,0,0)$) et est un extremum local de f, alors $\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $\frac{\partial L}{\partial(x,y,z)}(x_0,y_0,z_0,\lambda_0) = 0$. On obtient les équations

$$\begin{cases} x^2+2y^2-z^2-1 = 0 & (\star) \\ (2-2\lambda)x = 0 & (1) \\ (2-4\lambda)y = 0 & (2) \\ (2+2\lambda)z = 0 & (3) \end{cases}$$

comme λ peut prendre une seule valeur, ceci implique que 2 des 3 variables x,y,z sont nulles.

Cas 1 : $y = z = 0$. Alors $(\star)$ donne $x = \pm 1$.

Cas 2 : $x = z = 0$. Alors $(\star)$ donne $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Cas 3 : $x = y = 0$. Alors $(\star)$ n'a pas de solution réelle.

On vérifie les points obtenus :

- $f(1,0,0) = f(-1,0,0) = 1$.
- $f(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0) = \frac{1}{2} = f(0,\frac{-1}{\sqrt{2}},0)$.

Donc f restreinte à cette contrainte atteint son max $(=1)$ en $(\pm 1, 0, 0)$ et son min $(= \frac{1}{2})$ en $(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. $\square$