EXERCICES DE LA SÉRIE #5

#9 Soient (X,d), (Y,d') deux espaces métriques et soit $f : X \to Y$ une fonction.

(a) MQ si f est uniformément continue, alors pour chaque suite de Cauchy (x_n) de X, on a que $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy de Y. Fait au #5 (la semaine d'avant.)

(b) MQ si pour chaque suite de Cauchy (x_n) de X, $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy de Y et si X est compact, alors f est uniformément continue.

Comme X est compact, f est uniformément continue si et seulement si elle est continue.

Supposons que f n'est pas continue. Alors, $\exists x \in X$ et $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $\forall \delta > 0$, $\exists y \in X$ t.q. $d(x,y) < \delta$ mais $d'(f(x), f(y)) \geqslant \varepsilon$. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in X$ t.q. $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$ mais $d'(f(x), f(x_n)) \geqslant \varepsilon$.

Posons la suite (y_n) définie par $\begin{cases} y_{2n-1} = x \\ y_{2n} = x_n . \end{cases}$

Alors $y_n \xrightarrow{d} x$, donc (y_n) est de Cauchy. Or, $(f(y_n))$ n'est pas de Cauchy : posons ε comme plus haut. Soit $N \in \mathbb{N}$. Alors $2N, 2N+1 \geqslant N$ et

$$d'(f(y_{2N}), f(y_{2N+1})) = d'(f(x_N), f(x)) \geqslant \varepsilon.$$

On conclut que f est uniformément continue. $\square$

(c) MQ si pour chaque suite de Cauchy (x_n) de X, $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy de Y et si Y est complet, alors f est continue.

On peut faire la même preuve qu'au (b), sans le premier paragraphe.
(L'hypothèse que Y est complet n'est pas nécessaire.)

(d) MQ si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, Y est complet et si pour chaque suite de Cauchy (x_n) de X, $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy de Y, alors f est uniformément continue.

Par le (c), on sait déjà que f est continue. Comme $\bar{X}$ est fermé et borné dans $\mathbb{R}^n$, il est compact
$\Rightarrow$ si on prolonge f en une fonction $\tilde{f}$ continue sur $\bar{X}$, on aura que f est uniformément continue.

Soit $(x_n) \subseteq X$ t.q. $x_n \to x \in \partial X$. Alors (x_n) est de Cauchy $\Rightarrow$ $(f(x_n))$ est de Cauchy $\Rightarrow$ $f(x_n) \to y \in Y$ car Y est complet. Posons $\tilde{f}(x) = y$. Montrons que $\tilde{f}(x)$ est bien défini : soit $(\tilde{x}_n) \subseteq X$ une autre suite t.q. $\tilde{x}_n \to x$. Alors la suite définie par $z_{2n-1} = x_n$, $z_{2n} = \tilde{x}_n$ converge aussi vers x (exercice !).
Alors $(f(z_n))$ est aussi de Cauchy, donc converge.
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_{2n}) = \lim_{n\to\infty} f(z_{2n-1}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \tilde{f}(x)$.
Donc $\tilde{f}$ est continue $\Rightarrow$ f est unif. continue. $\square$

EXERCICES DE LA SÉRIE #6

#1 Soit $(X, \|\cdot\|')$ un espace vectoriel normé tel que $\dim X = n \in \mathbb{N}$ et soit $\{v_1, \dots, v_n\}$ une base de X. Construire une bijection $\varphi : \mathbb{R}^n \to X$ et une norme $\|\cdot\|''$ sur $\mathbb{R}^n$ t.q.

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y) \quad \text{et} \quad \|\varphi(x)\|' = \|x\|''$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base standard de $\mathbb{R}^n$. Posons $\varphi : \mathbb{R}^n \to X$ définie par $\varphi(e_i) = v_i$ et étendue linéairement ; c-à-d $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Par construction φ est linéaire, donc respecte la première propriété : $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi(y)$.

φ est une bijection, car elle possède une inverse : $\varphi^{-1} : X \to \mathbb{R}^n$ déf. par $\varphi^{-1}(v_i) = e_i$ et étendue linéairement.

On a alors $\varphi \circ \varphi^{-1}(v_i) = v_i$ et $\varphi^{-1} \circ \varphi(e_i) = e_i$ $\forall i = 1, \dots, n$, d'où $\varphi \circ \varphi^{-1} = 1_X$ et $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_{\mathbb{R}^n}$ $\Rightarrow$ φ^{-1} est bien l'inverse de φ.

Posons, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|'' = \|\varphi(x)\|'$. Comme φ est un isomorphisme d'espaces vectorielles, toutes les propriétés des normes pour $\|\cdot\|''$ découlent directement de celles pour $\|\cdot\|'$ sur X (vérifier en exercice si ça vous dit).

#2 On définit $\|\cdot\|' : M_{m\times n} \to [0,\infty)$ par $\|A\|' = \sup_{x\in S} \|Ax\|$, où $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.

(a) MQ $\|\cdot\|'$ est une norme sur $M_{m\times n}$.

1) $\|A\|' = 0 \Leftrightarrow \|Ax\| = 0 \ \forall x \in S \Leftrightarrow Ax = 0 \ \forall x \in S \Leftrightarrow A = 0.$

2) $\|\lambda A\|' = \sup_{x\in S} \|\lambda Ax\| = \sup_{x\in S} |\lambda| \|Ax\| = |\lambda| \cdot \sup_{x\in S} \|Ax\| = |\lambda| \cdot \|A\|' \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

3) $\|A+B\|' = \sup_{x\in S} \|(A+B)x\| \leq \sup_{x\in S} (\|Ax\| + \|Bx\|)$

$$\leq \sup_{x\in S} \|Ax\| + \sup_{x\in S} \|Bx\| = \|A\|' + \|B\|'$$

(b) MQ $\|Ax\| \leq \|A\|' \|x\| \quad \forall A \in M_{m\times n}, \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Soient $A \in M_{m\times n}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $\frac{x}{\|x\|} \in S$, d'où

$$\frac{1}{\|x\|} \|Ax\| = \left\|A \cdot \frac{x}{\|x\|}\right\| \leq \sup_{y\in S} \|Ay\| = \|A\|' \Rightarrow \|Ax\| \leq \|A\|' \cdot \|x\|.$$

(c) MQ $\|AB\|' \leq \|A\|' \cdot \|B'\| \quad \forall A \in M_{m\times n}, B \in M_{n\times p}$.

Soit $x \in S$. Alors

$$\|ABx\| \overset{(b)}{\leq} \|A\|' \cdot \|Bx\| \overset{(b)}{\leq} \|A\|' \cdot \|B\|' \cdot \|x\| \overset{\|x\|=1}{=} \|A\|' \cdot \|B\|',$$

d'où $\|AB\|' = \sup_{x\in S} \|ABx\| \leq \|A\|' \cdot \|B\|'$.

#4 Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction et $a \in U$ un point. MQ si f est dérivable en a, alors $f'(a)$ est unique.

Supposons que $\exists L_1, L_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linéaires t.q.

$f(a+h) = f(a) + L_1 h + r_1(h)$ et $f(a+h) = f(a) + L_2 h + r_2(h)$ avec

$\frac{\|r_1(h)\|}{\|h\|} \to 0$ et $\frac{\|r_2(h)\|}{\|h\|} \to 0$ lorsque $h \to 0$. Alors, $\forall x \in U$,

$$\|(L_1 - L_2)x\| = \|L_1 x - L_2 x\| = \|f(a+x) - f(a) - r_1(x) - f(a+x) + f(a) + r_2(x)\|$$

$$= \|r_2(x) - r_1(x)\|,$$

d'où $0 \leq \lim\limits_{x\to 0} \frac{\|(L_1-L_2)x\|}{\|x\|} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\|r_2(x) - r_1(x)\|}{\|x\|} \leq \lim\limits_{x\to 0} \frac{\|r_2(x)\| + \|r_1(x)\|}{\|x\|} = 0.$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \frac{\|(L_1-L_2)x\|}{\|x\|} = 0.$

Soit $x \in U$. $\forall t \in \mathbb{R}$, on a $(L_1 - L_2)(tx) = t\,(L_1-L_2)x$ par linéarité, d'où $\|(L_1-L_2)x\| = \frac{1}{t}\|(L_1-L_2)tx\|$ $\forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Alors

$$\|(L_1-L_2)x\| = \frac{\|x\|}{\|x\|}\|(L_1-L_2)x\| = \|x\| \frac{\|(L_1-L_2)(tx)\|}{\|tx\|} \quad \forall t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$$\Rightarrow \|(L_1-L_2)x\| = \lim_{t\to 0} \|x\| \cdot \frac{\|(L_1-L_2)(tx)\|}{\|tx\|} = \|x\| \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow L_1 - L_2 = 0$$

$$\Rightarrow L_1 = L_2$$

Donc $f'(a)$ est unique.

#5 Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. MQ si $f : U \to \mathbb{R}^m$ est constante, alors $f'(a) = 0 \ \forall a \in U$.

Soit $a \in U$. Alors, on a

$f(a+h) = f(a)$ car f est constante

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - 0 \cdot h \|}{\| h \|} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{\| h \|} = 0$$

Donc $f'(a) = 0 \ \forall a \in U$ par unicité (#4).

#6 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction définie par $f(x) = Ax + b$, où $A \in M_{m\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

(a) Pour tout $a \in \mathbb{R}^n$, calculer $f'(a)$.

Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Alors on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - Ah \|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\| A(a+h) + b - Aa - b - Ah \|}{\|h\|} = 0,$$

d'où $f'(a) = A$.

(b) On pose $g(a) := f'(a)$. C'est une fonction de $U \to M_{m\times n}$. Calculer $g'(a)$. Quelle est la dimension de la matrice qui représente g comme application linéaire ?

Soit $a \in U$. Alors

$$\lim_{h\to 0} \frac{\| g(a+h) - g(a) - 0 \cdot h \|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\| A - A \|}{\|h\|} = 0$$

$\Rightarrow g'(a) = 0$.

Comme $M_{m\times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$, $g'(a)$ est une matrice $n \times mn$.

#9 (Règle de Leibniz) Une application $\bullet : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^k$ est dite **bilinéaire** si $\forall x, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$, $\forall y, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^\ell$ et $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, on a $x \bullet (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 (x \bullet y_1) + \alpha_2 (x \bullet y_2)$ et $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \bullet y = \alpha_1 (x_1 \bullet y) + \alpha_2 (x_2 \bullet y)$.

Soit $\bullet : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^k$ une application bilinéaire et soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ et $g : U \to \mathbb{R}^\ell$ des fonctions dérivables en $a \in U$.

(b) MQ $\exists M$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^m$ et $\forall y \in \mathbb{R}^\ell$, on a $\|x \bullet y\| \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\|$.

Posons $M := \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} \|x \bullet y\|$. Ce nombre est fini : en écrivant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, on obtient

$$\|x \bullet y\| = \left\| \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \bullet \left(\sum_{i=1}^n y_i e_i \right) \right\|$$

$$= \sum_{i,j=1}^n |x_i| |y_j| \, \|e_i \bullet e_j\| \leq \sum_{i,j}^n \|e_i \bullet e_j\| := K < \infty$$

$\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \Rightarrow |x_i| \leq 1, |y_j| \leq 1$

On a alors, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x \bullet y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \left\| \frac{x}{\|x\|} \bullet \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\|,$$

tel que désiré.

(c) Déduire que $f \bullet g : U \to \mathbb{R}^k$ est dérivable en a et que $(f \bullet g)'(a)\, h = f'(a)\, h \bullet g(a) + f(a) \bullet g'(a)\, h$.

Calculons directement :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| f \bullet g\,(a+h) - f \bullet g\,(a) - f'(a) h \bullet g(a) - f(a) \bullet g'(a) h \|}{\|h\|}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) \bullet g(a+h) - f(a) \bullet g(a) - f'(a)\, h \bullet g(a) - f(a) \bullet g'(a) h \|}{\|h\|}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|} \| f(a+h)\cdot g(a+h) - f(a)\cdot g(a+h) + f(a)\cdot g(a+h)$$
$$- f(a)\cdot g(a) - f'(a)h\cdot g(a) - f(a)\cdot g'(a)h \|$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|} \| (f(a+h) - f(a) - f'(a)h)\cdot g(a+h) + f'(a)h\cdot(g(a+h) - g(a))$$
$$+ f(a)\cdot(g(a+h) - g(a) - g'(a)h) \|$$

$$\leqslant \lim_{h\to 0} \frac{M}{\|h\|} \Big(\| f(a+h) - f(a) - f'(a)h \| \cdot \| g(a+h) \|$$
$$+ \| f'(a)h \| \cdot \| g(a+h) - g(a) \| + \| f(a) \| \cdot \| g(a+h) - g(a) - g'(a)h \| \Big)$$

$$\leq \lim_{h\to 0} M \cdot \underbrace{\| g(a+h) \|}_{\to \|g(a)\| \in \mathbb{R}} \cdot 0 + M \cdot \frac{\|h\|}{\|h\|} \cdot \| f'(a) \| \cdot \underbrace{\| g(a+h) - g(a) \|}_{\to 0} + M \| f(a) \| \cdot 0$$

par continuité

par continuité de g

$$= 0 \quad \checkmark$$

#10 Utiliser l'exercice précédent pour calculer la dérivée de $f : M_n \to M_n : X \mapsto X^3$ en $A \in M_n$.

Vu en classe : la dérivée de $g : M_n \to M_n : X \mapsto X^2$ est $g'(A)H = AH + HA$.

On a $f = g \cdot id$, où $\cdot$ est la multiplication matricielle. Alors

$$
\begin{aligned}
f'(A)H &= (g \cdot id)'(A)H \\
&\overset{\#10}{=} g'(A)H \cdot id(A) + g(A) \cdot (id)'(A)H \\
&\overset{(id)'(A)H = H}{=} (AH + HA)A + A^2 H \\
&= AHA + HA^2 + A^2 H
\end{aligned}
$$

#11 (a) Soit $X \in M_n$ une matrice t.q. $\|X\| < 1$. MQ $I-X$ est inversible, où I est la matrice identité.

Notons que $\|X^k \cdot x\| \leq \|X\|^k \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall k \in \mathbb{N}$ (direct par induction). Comme $\|X\| < 1$, $\|X\|^k \to 0$ $(k \to \infty)$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall k \geq N$, $\|X\|^k < \frac{\varepsilon}{1-\|X\|}$ pour un $\varepsilon > 0$.

Montrons que $\sum_{k=1}^{\infty} X^k$ est bien définie. On va MQ $(S_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} X^k\right)$ est une suite de Cauchy : soient $m \leq n$,

$$\|S_n - S_m\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} X^k\right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|X\|^k = \|X\|^m \sum_{k=1}^{n-m} \|X\|^k$$

$$= \|X\|^m \cdot \frac{1-\|X\|^{n-m+1}}{1-\|X\|} \leq \|X\|^m \cdot \frac{1}{1-\|X\|} < \varepsilon$$

dès que $m, n \geq N$.

Alors (S_n) est une suite de Cauchy. Comme M_n est complet, $\exists S \in M_n$ t.q. $S_n \to S$.

Affirmation : ce S est l'inverse de $I-X$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$,

$$(I-X)Sx = (I-X)\sum_{k=0}^{\infty} X^k x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k x - \sum_{k=0}^{\infty} X^{k+1} x\right)$$

$$= X^0 x = x \Rightarrow (I-X)S = I$$

$$S(I-X)x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} X^k\right)(x - Xx) = \sum_{k=0}^{\infty} X^k x - \sum_{k=0}^{\infty} X^{k+1} x = x$$

$$\Rightarrow S(I-X) = I.$$

(b) MQ si $X \in M_n^{-1}$, alors $B(X, \frac{1}{\|X^{-1}\|}) \subseteq M_n^{-1}$. En déduire que M_n^{-1} est ouvert.

Soit $Y \in B(X, \frac{1}{\|X^{-1}\|})$. Alors $Y = X + H$ pour un certain $H \in M_n$ t.q. $\|H\| < \frac{1}{\|X^{-1}\|}$. On a $X + H = X(I - (-X^{-1}H))$ et $\|-X^{-1}H\| = \|X^{-1}H\| \leq \|X^{-1}\| \cdot \|H\| < \|X^{-1}\| \cdot \frac{1}{\|X^{-1}\|} = 1 \Rightarrow I - (-X^{-1}H)$ est inversible par le (a) $\Rightarrow Y = \underbrace{X}_{\text{inversible}}\underbrace{(I-(-X^{-1}H))}_{\text{inversible}}$ aussi.

Alors X est un point intérieur et M_n^{-1} est ouvert par définition.

(c) On définit $F : M_n^{-1} \to M_n^{-1}$ par $F(X) = X^{-1}$. MQ F est dérivable en chaque $A \in M_n^{-1}$ et que $F'(A)$ est l'application linéaire $H \mapsto -A^{-1}HA^{-1}$.

Notons qu'on a

$$\begin{aligned}
F(A+H) - F(A) &= (A+H)^{-1} - A^{-1} \\
&= ((I + HA^{-1})A)^{-1} - A^{-1} \\
&= A^{-1}(I - (-HA^{-1}))^{-1} - A^{-1} \\
&= A^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} (-HA^{-1})^k\Big) - A^{-1} \\
&= A^{-1}\Big(I - HA^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} (-HA^{-1})^k - I\Big)
\end{aligned}$$

pour $\|H\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{H \to 0} \frac{\|F(A+H) - F(A) - (-A^{-1}HA^{-1})\|}{\|H\|} \\
&= \lim_{H \to 0} \frac{\|A^{-1}(\cancel{-HA^{-1}} + \sum_{k=2}^{\infty} (-HA^{-1})^k) + \cancel{A^{-1}HA^{-1}}\|}{\|H\|} \\
&\leq \lim_{H \to 0} \frac{\|A^{-1}\|}{\|H\|} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \|(HA^{-1})^k\| \\
&\leq \lim_{H \to 0} \frac{\|A^{-1}\|}{\|H\|} \sum_{k=2}^{\infty} \|H\|^k \|A^{-1}\|^k \\
&= \lim_{H \to 0} \frac{\|A^{-1}\|^3 \cdot \|H\|^{\cancel{2}}}{\cancel{\|H\|}} \sum_{k=0}^{\infty} \|H\|^k \|A^{-1}\|^k \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

Donc $F'(A)$ a bien la forme voulue. $\square$

#12 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 \cos x_3 \\ x_2 \sin x_1 \end{pmatrix}$.
mq f est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}^3$ et calculer $f'(a)$.

Calculons la matrice jacobienne $J_f(a)$ pour $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) = \cos(a_3) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) = a_2 \cos(a_1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) = 2 \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) = \sin(a_1)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(a) = -a_1 \sin(a_3) \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(a) = 0$$

Donc
$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \cos(a_3) & 2 & -a_1 \sin(a_3) \\ a_2 \cos(a_1) & \sin(a_1) & 0 \end{pmatrix}$$

Chacune des entrées est une fonction continue, d'où J_f est continue en $a \in \mathbb{R}^3$. Par un théorème vu en classe, on conclut que f est dérivable en $a \in \mathbb{R}^3$ et que $f'(a) = J_f(a)$.