EXERCICES DE LA SÉRIE #3

#6 MQ si (X,d) est un espace métrique compact, alors il est **séparable** : il existe $E \subseteq X$ au plus dénombrable et dense dans X.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et considérons le recouvrement ouvert de X donné par $\bigcup_{x\in X} B(x, \frac{1}{n})$. Comme X est compact, $\exists \{x_1, x_2, \dots, x_k\} := E_n$ t.q. $X \subseteq \bigcup_{x\in E_n} B(x, \frac{1}{n})$.
Posons $E := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, E_n est un ensemble fini, d'où E est au plus dénombrable (car une union dénombrable d'ensembles finis est dénombrable).
Montrons que E est dense dans X. Il suffit de MQ $X \subseteq \bar{E}$, car on a déjà $\bar{E} \subseteq X$.
Soit $y \in X$ et soit $r > 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Comme $\bigcup_{x\in E_N} B(x, \frac{1}{N}) \supseteq X$, $\exists x \in E_N$ t.q. $y \in B(x, \frac{1}{N})$. Alors on a aussi $x \in B(y, \frac{1}{N})$, et comme $x \in E$, on obtient

$$B(y, r) \cap E \supseteq B(y, \tfrac{1}{N}) \cap E \neq \emptyset.$$

Comme ceci vaut $\forall r > 0$, on conclut que $y \in \bar{E}$.
Alors E est dense dans X et X est séparable, tel que désiré.

$\square$

#11 Soit (X,d) un espace métrique et soit $E \subseteq X$ un ensemble borné et non vide. Le **diamètre** de E est $\delta(E) := \sup_{x,y \in E} d(x,y)$.

(a) MQ si E est contenu dans une boule fermée de rayon r, alors $\delta(E) \leq 2r$.

Soient $x, y \in E$ et $\overline{B(z,r)}$ t.q. $E \subseteq \overline{B(z,r)}$. Alors on a

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \leq r + r = 2r,$$

$\hookrightarrow x, y \in \overline{B(z,r)}$

d'où $\sup_{x,y \in E} d(x,y) \leq 2r$.

(b) La réciproque est-elle vraie ?

Non. Soit X un ensemble muni de la métrique discrète d. Alors $\delta(X) = 1$, car $d(x,y) \leq 1 \ \forall x,y \in X$ et $d(x,y) = 1$ dès que $x \neq y$. Or, $\forall x \in X$, $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \neq X$.

(c) MQ si E est compact, alors $\exists x,y \in E$ t.q. $\delta(E) = d(x,y)$.

D'abord, par le #15, on a que $E \times E$ est compact dans (X^2, d_1), où $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |d(x_1,x_2)| + |d(y_1,y_2)|$.

Montrons que $f : (E \times E, d_1) \to (\mathbb{R}, d_1) : (x,y) \mapsto d(x,y)$ est continue : soit $\varepsilon > 0$. Alors, pour $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in E \times E$ t.q. $d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |d(x_1,x_2)| + |d(y_1,y_2)| < \delta$, on a

$$\begin{aligned} d_1(f(x_1,y_1), f(x_2,y_2)) &= |d(x_1,y_1) - d(x_2,y_2)| \\ &= |d(x_1,y_1) - d(y_1,x_2) + d(y_1,x_2) - d(x_2,y_2)| \\ &\leq |d(x_1,y_1) - d(y_1,x_2)| + |d(y_1,x_2) - d(x_2,y_2)| \\ &\leq d(x_1,x_2) + d(y_1,y_2) < \delta \leq \varepsilon \quad \text{dès que } \delta \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Alors f atteint son maximum sur $E \times E$, d'où $\exists\, x, y \in E$ t.q. $d(x,y) \geqslant d(x', y')$ $\forall\, x', y' \in E$. Donc $\delta(E) = \sup_{x', y' \in E} d(x', y') = d(x,y)$.

(d) MQ (c) est faux en général si E n'est pas compact.

Exemple si E n'est pas borné : si $E = \mathbb{R}$, alors $\delta(E) = \infty$ n'est pas atteint.

Exemple si E n'est pas fermé : si $E = (0,1)$, alors $\delta(E) = 1$, car $d(x,y) < 1$ $\forall\, x, y \in E$ et $d\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{2}{n} \longrightarrow 1$ $(n \to \infty)$, d'où $\sup_{x,y \in E} d(x,y) \geqslant 1$. Or ceci implique que $\nexists\, x, y \in E$ t.q. $\delta(E) = 1 = d(x,y)$.

#13 Soit l'espace métrique (ℓ^∞, d_∞). Trouver un exemple d'ensemble fermé et borné qui n'est pas compact.

On peut prendre $\bar{B}(0,1)$. En effet, cet ensemble est borné et fermé, mais la suite $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bar{B}(0,1)$, où $x^{(n)} = (\delta_{in})_{i\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire la suite

$$(x^{(n)}) = ((1,0,0,\dots),(0,1,0,\dots),(0,0,1,0,\dots),\dots))$$

ne possède pas de sous-suite convergente.

Preuve : si $x^{(n_k)} \to y$, alors $y_i = 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$. Mais alors $d_\infty(y, x^{(n_k)}) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |y_i - x_i^{(n_k)}| = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$, ce qui donne une contradiction. $\not\forall$

Donc $\bar{B}(0,1)$ n'est pas séquentiellement compact, d'où il n'est pas compact.

#17 Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ compact et $f : E \to \mathbb{R}$. MQ f est continue ssi son graphe $G := \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

($\Rightarrow$) Posons $F : E \to E \times \mathbb{R} : x \mapsto (x, f(x))$. Montrons que F est continue sur E. Soit $(x_n) \subseteq E$ t.q. $x_n \to x \in E$. Alors on a $F(x_n) = (x_n, f(x_n)) \to (x_*, y_*) \in E \times \mathbb{R}$. Par un résultat d'un précédent TP on a alors $x_n \to x_*$ et $f(x_n) \to y_*$. Par unicité de la limite, on obtient $x_* = x$ et $y_* = f(x)$ par continuité de f. Donc $F(x_n) \to (x, f(x)) = F(x)$. Comme ceci vaut pour toute suite convergente de E, on conclut que F est continue.

L'image d'un compact par une fonction continue est compacte. Comme $G = F(E)$, on obtient que G est compact.

($\Leftarrow$) Supposons que G est compact. Soit $Y \subseteq \mathbb{R}$ un fermé. Montrons que $f^{-1}(Y)$ est fermé. Soit $(x_n) \subseteq f^{-1}(Y)$ t.q. $x_n \to x$. Il suffit de MQ $x \in f^{-1}(Y)$, c-à-d $f(x) \in Y$. Considérons la suite $(x_n, f(x_n)) \subseteq G$. Comme G est compact, $\exists\, (x_{n_k}, f(x_{n_k}))$ une sous-suite t.q. $(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \to (x_*, y_*) \in G$. Comme $x_n \to x$, on a $x_{n_k} \to x$, d'où $x_* = x$. Comme $(x, y_*) \in G$, on a $y_* = f(x)$. Comme $(x_{n_k}) \subseteq f^{-1}(Y)$, $(f(x_{n_k})) \subseteq Y$, d'où $f(x) \in Y$ car Y est fermé. Alors $x \in f^{-1}(Y)$.

Comme la préimage par f de chaque fermé dans $\mathbb{R}$ est un fermé, on conclut que f est continue.

Autre preuve de $(\Leftarrow)$:

Soit $(x_n) \subseteq E$ t.q. $x_n \to x$ et soit (x_{n_k}) une sous-suite arbitraire. Considérons la suite $(x_{n_k}, f(x_{n_k})) \subseteq G$. Comme G est compact, $\exists\, (x_{n_{k_\ell}}, f(x_{n_{k_\ell}}))$ une sous-sous-suite t.q. $(x_{n_{k_\ell}}, f(x_{n_{k_\ell}})) \to (x_*, y_*) \in G$. Comme $x_n \to x$, on a $x_{n_{k_\ell}} \to x$, d'où $x_* = x$. Comme $(x, y_*) \in G$, on a $y_* = f(x)$, d'où $f(x_{n_{k_\ell}}) \to f(x)$.

Comme toute sous-suite de $(f(x_n))$ possède une sous-suite convergente, on conclut que $f(x_n) \to f(x)$.* Donc f est continue.

* Preuve de $x_n \to x \Leftrightarrow \forall (x_{n_k}) \subseteq (x_n), \exists (x_{n_{k_\ell}}) \subseteq (x_{n_k})$ t.q. $x_{n_{k_\ell}} \to x$:

$(\Rightarrow)$ Clair.

$(\Leftarrow)$ Supposons que $x_n \not\to x$. Alors, $\exists\, \varepsilon > 0$ t.q. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists\, n_k > k$ t.q. $d(x_{n_k}, x) \geqslant \varepsilon$. Mais alors la sous-suite (x_{n_k}) ne possède pas de sous-suite convergente. $\lightning$

EXERCICES DE LA SÉRIE #4

#3 Soit $E \subseteq \mathbb{R}^2$ connexe contenant au moins deux points distincts p, q. MQ $\forall \delta > 0$ t.q. $0 < \delta < d_2(p,q)$, $\exists x \in E$ t.q. $d_2(x,p) = \delta$.

Supposons le contraire. Posons $U = B(p,\delta)$ et $V = \{y \in E \mid d_2(y,p) > \delta\}$. Alors U et V sont des ouverts de X (U est une boule ouverte, $V^c = \overline{B(p,\delta)}$ est une boule fermée), $p \in U \cap E$, $q \in V \cap E$ et $U \cap V \cap E = \emptyset$ et $E \subseteq U \cup V$ car $U \cup V = \mathbb{R}^2 \setminus \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(y,p) = \delta\}$ et $E \cap \{y \in \mathbb{R}^2 \mid d_2(y,p)\} = \emptyset$ par hypothèse.
Or, ça implique que E est disconnexe par le #1 (a). $\divideontimes$
Donc $\exists x \in E$ t.q. $d_2(x,p) = \delta$. $\square$

(Notons qu'on n'a rien utilisé de spécifique à $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Le résultat reste vrai (avec la même preuve) dans un espace métrique (X,d) quelconque.)

#4 MQ si (X,d) est un espace métrique contenant plus d'un point, alors X est infini indénombrable.
Soient $p, q \in X$ t.q. $p \neq q$. Par le #3, $\forall \delta \in \mathbb{R}$ t.q. $0 < \delta < d(p,q)$, $\exists x \in X$ t.q. $d(p,x) = \delta$. Ceci entraîne que $|X| \geq |(0, d(p,q))|$, d'où X est infini indénombrable car l'intervalle $(0, d(p,q)) \subseteq \mathbb{R}$ l'est.

#5 Soit $C[0,1]$ muni de d_∞ et soit $M>0$. On pose $E = \{ \int_0^1 f \mid 0 \leq f \leq M \text{ et } f(0)=f(1)=0 \}$.

(a) MQ E est connexe.

Montrons que $A = \{ f \in C[0,1] \mid 0 \leq f \leq M,\ f(0)=f(1)=0 \}$ est connexe par arcs. Soient $f,g \in A$ et posons $\gamma : [0,1] \to A$, $t \mapsto (1-t)f + tg$.

Alors γ est continue : soit $\varepsilon > 0$. Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$. Alors $\forall\, t_1, t_2 \in [0,1]$ t.q. $|t_1 - t_2| < \delta$, on a

$$\begin{aligned} d_\infty(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) &= \sup_{x\in[0,1]} |\gamma(t_1)(x) - \gamma(t_2)(x)| \\ &= \sup_{x\in[0,1]} |(t_2-t_1)f(x) + (t_1-t_2)g(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[0,1]} |t_2-t_1| f(x) + |t_1-t_2| g(x) \\ &\leq |t_1-t_2|(M+M) \\ &< \frac{\varepsilon}{2M}\cdot 2M = \varepsilon \quad \checkmark \end{aligned}$$

Aussi, $\forall t \in [0,1]$, $\gamma(t) = (1-t)f + tg \in C[0,1]$, et

- $\gamma(t)(0) = (1-t)f(0) + t\,g(0) = 0 + 0 = 0$
- $\gamma(t)(1) = (1-t)f(1) + t\,g(1) = 0 + 0 = 0$

Donc $\gamma(t) \in A$.

Finalement, $\gamma(0) = f$ et $\gamma(1) = g$. Donc A est connexe par arcs. En particulier, A est connexe.

La fonction $F : C[0,1] \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 f$ est continue : soit $\varepsilon > 0$. Alors, $\forall f,g \in C[0,1]$ t.q. $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)| < \varepsilon$, on a $|F(f)-F(g)| = |\int_0^1 f-g| \leq \int_0^1 |f-g| \leq \int_0^1 \varepsilon = \varepsilon$.

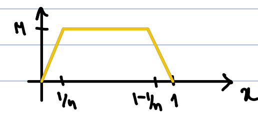
Alors $E = F(A)$ est aussi connexe.

(b) Trouver l'intervalle qui correspond à E.

On a toujours $0 \leq \int_0^1 f < M$ $\forall f \in A$. Alors $E \subseteq [0, M)$. En fait

$E = [0, M)$: on a $0 \in A$ et $\int_0^1 0 = 0$. Posons $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

définie par $f_n(x) = \begin{cases} x \cdot nM & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}) \\ M & \text{si } x \in [1/n, 1-1/n] \\ (1-nx) \cdot M & \text{si } x \in (1-1/n, 1] \end{cases}$



Alors $f_n \in A$ et $F(f_n) = M - \frac{M}{n}$. Alors $F(f_n)$ peut se rendre arbitrairement près de M $\Rightarrow$ $E = [0, M)$.

#6 Soit (X,d) un espace métrique et soit $Y = \{0,1\}$ muni de la métrique discrète. MQ X est connexe ssi toute fonction continue $f: X \to Y$ est constante.

($\Rightarrow$) Supposons que X est connexe. Alors $f(X)$ est connexe.
Or $E \subseteq \{0,1\}$ non vide est connexe ssi $E = \{0\}$ ou $\{1\}$.
Alors $f(X) = \{0\}$ ou $\{1\}$, d'où f est constante.

($\Leftarrow$) Supposons que X est disconnexe. Soient U, V ouverts t.q. $U \cap V = \emptyset$, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $X = U \cup V$. Posons $f: X \to \{0,1\}$ t.q. $f(x) = 0$ si $x \in U$ et $f(x) = 1$ si $x \in V$. Alors f n'est pas constante, mais f est continue parce que $f^{-1}(Y) = X$, $f^{-1}(\{0\}) = U$, $f^{-1}(\{1\}) = V$, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ sont ouverts. Donc $\forall\, O \subseteq Y$ ouvert, $f^{-1}(O)$ est ouvert $\Rightarrow f$ est continue.

#11 Soient (X,d) et (Y,d') des espaces métriques. MQ $(X\times Y, d_1)$ est connexe ssi X et Y sont connexes, où

$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d(x_1,x_2) + d'(y_1,y_2)$$

($\Rightarrow$) Supposons SPDG que X n'est pas connexe. Soient $U,V \neq \emptyset$ ouverts de X t.q. $U \cap V = \emptyset$ et $X = U \cup V$. Alors $U\times Y$, $V \times Y$ sont ouverts dans $(X\times Y, d_1)$ et $U\times Y, U\times Y \neq \emptyset$, $U\times Y \cap V \times Y = \emptyset$ et $X\times Y \subseteq U\times Y \cup V\times Y$. Donc $X\times Y$ n'est pas connexe.

($\Leftarrow$) Soit $f : X\times Y \to \{0,1\}$ continue, où $\{0,1\}$ est muni de la topologie discrète. Montrons que f est constante. Fixons $y_* \in Y$ et posons $f_{y_*} : X \to \{0,1\} : x \mapsto f(x,y_*)$. Alors f_* est continue, donc constante par le #6 car X est connexe.

Fixons $x_* \in X$ et posons $f_{x_*} : Y \to \{0,1\} : y \mapsto f(x_*,y)$. Alors f_{x_*} est constante aussi.

Alors f est constante : soient $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X\times Y$. Alors

$$f(x_1,y_1) \underset{f_{x_1}\text{ est constante}}{=} f(x_1,y_2) \underset{f_{y_2}\text{ est constante.}}{=} f(x_2,y_2).$$

Par le #6, on conclut que $X\times Y$ est connexe.

$\square$

#14 Soit $k \geq 2$ un entier.

(a) MQ $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ est connexe.

Montrons que $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Si la droite reliant x et y ne passe pas par l'origine, alors on peut prendre

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\} : t \mapsto (1-t)x + ty$.

Ceci est la partie qui nécessite $k \geq 2$.

Sinon, prenons $z \in \mathbb{R}^k \setminus \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Alors $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ définie par
$$\gamma(t) = \begin{cases} (1-2t)x + 2tz & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ (1-2t)z + 2ty & \text{si } t \in (1/2, 1] \end{cases}$$
est continue et ne passe pas par 0, et $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

On conclut que $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ est connexe par arcs.

(b) Déduire de (a) que $S^{k-1} := \{x \in \mathbb{R} \mid d_2(x, 0) = 1\}$ est connexe.

Soit $f : \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \to S^{k-1} : x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Alors f est continue:

soit $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit $y \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ t.q. $d_2(x,y) < \frac{\varepsilon \|x\|}{2}$

Alors
$$\begin{aligned} d_2(f(y), f(x)) = \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| &= \frac{1}{\|x\|\|y\|} \big\| x\|y\| - y\|x\| \big\| \\ &= \frac{1}{\|x\| \cdot \|y\|} \big\| x\|y\| - y\|y\| + y\|y\| - y\|x\| \big\| \\ &\leq \frac{1}{\|x\| \cdot \|y\|} \big(\|y\| \cdot \|x-y\| + |\|y\| - \|x\|| \cdot \|y\| \big) \\ &\leq \frac{1}{\|x\|} \big(\|x-y\| + \|y-x\| \big) \\ &< \frac{1}{\|x\|} \left(\frac{\varepsilon \|x\|}{2} + \frac{\varepsilon \|x\|}{2} \right) = \varepsilon \quad \checkmark \end{aligned}$$

Alors $f(\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) = S^{k-1}$ est connexe, car $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ l'est.

(c) Déduire de a) que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

Supposons qu'on a $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un homéomorphisme.

Alors $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{f(0)\}$ est un homéomorphisme également. Or $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est connexe par le (a), mais $\mathbb{R} \setminus \{f(0)\} = (-\infty, f(0)) \cup (f(0), +\infty)$ ne l'est pas.