EXERCICES DE LA SÉRIE #2

#8 Soient (X,d) et (Y,d') des espaces métriques et $f: X \to Y$ une fonction.

(a) MQ $E = \{x \in X \mid f \text{ est continue en } x\}$ est un G_δ.

Suivons l'indice et considérons

$$U_n = \{x \in X \mid \exists \delta > 0 \text{ t.q. } y, z \in B(x,\delta) \Rightarrow d'(f(y), f(z)) < \tfrac{1}{n}\}$$

U_n est ouvert :

Soit $x_0 \in U_n$. Soit $\delta > 0$ t.q. $y, z \in B(x_0, \delta) \Rightarrow d'(f(y), f(z)) < \frac{1}{n}$.
Soit $x \in B(x_0, \delta)$. Soit $\eta > 0$ t.q. $B(x, \eta) \subseteq B(x_0, \delta)$.
Alors, $\forall y, z \in B(x, \eta)$, on a aussi $y, z \in B(x_0, \delta)$, d'où $d'(f(y), f(z)) < \frac{1}{n}$. On conclut que $x \in U_n$, et donc que $B(x_0, \delta) \subseteq U_n$. Donc U_n est ouvert.

On veut MQ $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

$(\subseteq)$ Soit $x \in E$. Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists \delta > 0$ t.q. $y \in B(x, \delta) \Rightarrow d'(f(y), f(x)) < \frac{1}{2n}$. Pour tous $y, z \in B(x, \delta)$, on a alors

$$d'(f(y), f(z)) \leq d'(f(y), f(x)) + d'(f(z), f(x)) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n},$$

d'où $x \in U_n$. Comme ceci tient $\forall n \in \mathbb{N}$, on a en fait $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, d'où $E \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

$(\supseteq)$ Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{N} < \varepsilon$.
Comme $x \in U_N$, $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall y, z \in B(x, \delta)$, $d'(f(y), f(z)) < \varepsilon$.
En particulier, $\forall y \in B(x, \delta)$, $d'(f(y), f(x)) < \varepsilon$.
Donc f est continue en x, d'où $x \in E$. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subseteq E$.

(b) En déduire que l'ensemble des points de discontinuité de f est un F_σ.

Cet ensemble est $E^c = X \setminus E$. Par un résultat d'un tp précédent (#24b) de la série 1), E est un G_δ ssi E^c est un F_σ, d'où E^c est un F_σ par le (a).

(c) Est-il possible de construire une fonction $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ continue en chaque point rationnel est discontinue en chaque irrationnel ?

(Supposons que la métrique sur $(0,1)$ et sur $\mathbb{R}$ est d_2.)

L'ensemble des points de continuité d'une telle f serait $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ et, par le (a), ce serait un G_δ. Or, $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ n'est pas un G_δ (il suffit d'adapter la preuve du #24 e) de la série 1). Donc non, ce n'est pas possible.

(d) Soit F un F_σ de $\mathbb{R}$. Soient F_n des fermés t.q. $F = \bigcup_{n \geq 1} F_n$.

On définit $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } x \in F_n \cap \mathbb{Q} \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}) \\ -1/n & \text{si } x \in F_n \setminus (\mathbb{Q} \cup F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}) \\ 0 & \text{si } x \notin F \end{cases}$

MQ l'ensemble des points de discontinuité de f est exactement F.

D'abord, f est continue sur F^c : soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ t.q. $x_k \to x \in F^c$. Alors $f(x_k) \to f(x) = 0$: soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Comme F_n est fermé, F_n^c est ouvert et $\exists r_n > 0$ t.q. $B(x, r_n) \subseteq F_n^c$. Comme $x_k \to x$, $\exists K_n$ t.q. $\forall k \geq K_n$, $x_k \in B(x, r_n) \subseteq F_n^c$, d'où $x_k \notin F_n$.

En prenant $K = \max_{1 \leq n \leq N} K_n$, on obtient $x_k \notin F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_N \ \forall k \geq K$.

Alors, $\forall k \geq K$, $|f(x_k) - f(x)| = |f(x_k)| \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$.

Montrons que f est discontinue en tout point de F :

soit $x \in F = \bigcup_{n \geq 1} F_n$. Soit $N \geq 1$ t.q. $x \in F_N \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_{N-1})$.

Posons $\varepsilon = \frac{1}{2N}$. Soit $\delta > 0$.

<u>Cas 1 : $x \in \mathbb{Q}$</u>. Alors $f(x) = \frac{1}{N}$. Par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\exists y \in B(x, \delta)$ t.q. $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Si $y \notin F$, $f(y) = 0$, et sinon $f(y) = \frac{-1}{n}$ pour un certain n. Dans tous les cas, $|f(y) - f(x)| \geq f(x) - f(y) = \frac{1}{N} - f(y) \geq \frac{1}{N} > \varepsilon$.

<u>Cas 2 : $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$</u>. Alors $f(x) = \frac{-1}{N}$. Par densité de $\mathbb{Q}$, $\exists y \in B(x, \delta)$ t.q. $y \in \mathbb{Q}$. Si $y \notin F$, $f(y) = 0$, et sinon $f(y) = \frac{1}{n}$ pour un certain n. Dans les deux cas, $|f(y) - f(x)| \geq f(y) - f(x) \geq 0 - (\frac{-1}{N}) = \frac{1}{N} > \varepsilon$.

On conclut que f n'est pas continue en $x \in F$.

Alors l'ensemble des points de discontinuité de f est exactement F. $\square$

#20 Soit $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ une isométrie. MQ $f(x) = Ax + b$, où A est une matrice $k \times k$ orthogonale et $b \in \mathbb{R}^k$. On suppose pour le moment que $f(0) = 0$.

(a) MQ $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^k$.

Comme f est une isométrie,

$$\|f(x) - f(y)\|^2 = d_2(f(x), f(y))^2 = d_2(x,y)^2 = \|x - y\|^2$$

En particulier, $\forall x \in \mathbb{R}^k$, $\|f(x)\|^2 = \|f(x) - 0\|^2 = \|f(x) - f(0)\|^2 = \|x\|^2$.

On a aussi

$$\begin{aligned}
\|f(x) - f(y)\|^2 &= \langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle \\
&= \langle f(x), f(x) - f(y) \rangle - \langle f(y), f(x) - f(y) \rangle \\
&= \langle f(x), f(x) \rangle - \langle f(x), f(y) \rangle \\
&\qquad - \langle f(y), f(x) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle \\
&= \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 - 2 \langle f(x), f(y) \rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle f(x), f(y) \rangle \quad (*)
\end{aligned}$$

et $\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y \rangle = \cdots = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle$. $(*)$

De l'égalité $(*) = (*)$, on déduit que $\forall x, y \in \mathbb{R}^k$,

$$-2\langle f(x), f(y) \rangle = -2\langle x, y \rangle \iff \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

(b) MQ $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}^k$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

On peut calculer

$$\begin{aligned}
&d_2(f(\alpha x + y), \alpha f(x) + f(y))^2 \\
&\quad = \langle f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y), f(\alpha x + y) - \alpha f(x) - f(y) \rangle \\
&\quad = \langle f(\alpha x + y), f(\alpha x + y) \rangle - 2\alpha \langle f(\alpha x + y), f(x) \rangle \\
&\qquad - 2 \langle f(\alpha x + y), f(y) \rangle + \alpha^2 \langle f(x), f(x) \rangle \\
&\qquad + 2\alpha \langle f(x), f(y) \rangle + \langle f(y), f(y) \rangle
\end{aligned}$$

$$= \langle \alpha x+y, \alpha x+y\rangle - 2\alpha\langle \alpha x+y, x\rangle - 2\langle \alpha x+y, y\rangle$$
$$+ \alpha^2\langle x,x\rangle + 2\alpha\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle$$
$$= \langle \alpha x+y, \alpha x+y\rangle - 2\langle \alpha x+y, \alpha x+y\rangle$$
$$+ \langle \alpha x+y, \alpha x+y\rangle$$
$$= 0$$

Donc $f(\alpha x+y) = \alpha f(x) + f(y)$.

(c) MQ $f(x) = Ax$, où A est une matrice $k\times k$ orthogonale.

Au b), on a montré que f est linéaire $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$.
Donc f est représentée par une matrice $A \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ en fixant une base $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ de $\mathbb{R}^k$. Alors A_{ij} est la composante en e_i de $f(e_j)$.

On a, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^k$,

$\langle Ax, Ay\rangle = (Ax)^t Ay$
$= x^t A^t A y = \langle x, A^t Ay\rangle$

$$\langle x,y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, A^t Ay\rangle$$

Ceci donne

$$(A^tA)_{ij} = \langle e_i, A^tAe_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij},$$

c-à-d $A^tA = I$.

Donc A est une matrice orthogonale, et $f(x) = Ax$ $\forall x \in \mathbb{R}^k$.

(d) Déduire le résultat général, c-à-d lorsque $f(0) = b \in \mathbb{R}^k$.

Si f est une isométrie, $g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k : x \mapsto f(x) - b$ est aussi une isométrie et $g(0) = 0$. Alors $g(x) = Ax$ $\forall x \in \mathbb{R}^k$ par a), b), c), et $f(x) = Ax + b$ $\forall x \in \mathbb{R}^k$. $\square$

#25 Soient d, d' des métriques sur X. MQ LÉSSÉ :

(a) d et d' sont Lipschitz équivalentes.

(b) $\exists A, B > 0$ t.q. $\forall x, y \in X$, $A d'(x,y) \leq d(x,y) \leq B d'(x,y)$.

(c) $\exists C \geq 1$ t.q. $\forall x, y \in X$, $\frac{1}{C} d'(x,y) \leq d(x,y) \leq C d'(x,y)$.

Rappel : On dit que d et d' sont **Lipschitz équivalentes** si l'application identité $I : (X,d) \to (X,d')$ est bilipschitz.

(a) $\Rightarrow$ (b) : Comme $I : (X,d) \to (X,d')$ est lipschitzienne, $\exists c > 0$ t.q. $d'(I(x_1), I(x_2)) \leq c\, d(x_1,x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$.
Alors, en posant $A := \frac{1}{c} > 0$, on obtient

$$A d'(x_1,x_2) \leq d(x_1,x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Comme $I^{-1} : (X,d') \to (X,d)$ est Lipschitz, $\exists B > 0$ t.q. $d(I^{-1}(x_1), I^{-1}(x_2)) \leq B\, d'(x_1,x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$. On a donc bien $A d'(x_1,x_2) \leq d(x_1,x_2) \leq B d'(x_1,x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$.

(b) $\Rightarrow$ (c) : Posons $B' = \max\{B, 1\}$ et $A' = \min\{A, 1\}$.
Alors $A' \leq A$ et $B' \geq B$, d'où

$$A' d'(x_1,x_2) \leq d(x_1,x_2) \leq B' d'(x_1,x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Posons $C = \max\{B', \frac{1}{A'}\}$. Comme $B' \geq 1$ et $A' \leq 1$, $C \geq 1$. On a aussi $C \geq B$ et $C \geq \frac{1}{A'} \Rightarrow \frac{1}{C} \leq \frac{1}{1/A'} = A'$, d'où $\frac{1}{C} d'(x_1,x_2) \leq d(x_1,x_2) \leq C d'(x_1,x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$.

(c) $\Rightarrow$ (a) : Soient $x, y \in X$ et considérons $I : (X,d) \to (X,d')$.
Alors $d'(I(x), I(y)) = d'(x,y) \leq C\, d(x,y)$. Donc I est C-Lipschitz. On a aussi

$$d(I^{-1}(x), I^{-1}(y)) = d(x,y) \leq C\, d'(x,y),$$

d'où I^{-1} est également C-Lipschitz. On conclut que I est bilipschitz, et donc que d et d' sont Lipschitz équivalentes.

$\square$

EXERCICES DE LA SÉRIE #3

#3 Soit (X, d) un espace métrique, $K \subseteq X$ un compact et $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K. MQ $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall x \in K$, $\exists i \in I$ pour lequel $B(x, \delta) \subseteq U_i$. (Un tel δ est appelé une **constante de Lebesgue** pour K et $\{U_i\}_{i \in I}$.)

Pour chaque $x \in K$, $\exists i \in I$ t.q. $x \in U_i$. Comme U_i est ouvert, $\exists \delta(x) > 0$ t.q. $B(x, \delta(x)) \subseteq U_i$.

Considérons alors le recouvrement ouvert de K donné par $\bigcup_{x \in K} B(x, \frac{1}{2}\delta(x))$. Comme K est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini :

$K \subseteq B(x_1, \frac{1}{2}\delta(x_1)) \cup B(x_2, \frac{1}{2}\delta(x_2)) \cup \cdots \cup B(x_n, \frac{1}{2}\delta(x_n))$.

Posons $\delta = \min\{\frac{1}{2}\delta(x_1), \frac{1}{2}\delta(x_2), \ldots, \frac{1}{2}\delta(x_n)\}$. Montrons que ce δ fonctionne : soit $x \in K$. Alors $\exists k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ t.q. $x \in B(x_k, \frac{1}{2}\delta(x_k))$. Soit $y \in B(x, \delta)$. Montrons que $y \in B(x_k, \delta(x_k))$: on a

$$d(y, x_k) \leqslant d(y, x) + d(x, x_k) < \delta + \frac{1}{2}\delta(x_k) \leqslant \delta(x_k)$$

par choix de δ. Alors $B(x, \delta) \subseteq B(x_k, \delta(x_k)) \subseteq U_i$ pour un certain $i \in I$, par choix de $\delta(x_k)$.

$\square$

#4 Soit (X,d) un espace métrique, $\mathcal{U}$ un ouvert de X et $K \subseteq \mathcal{U}$ un compact non vide.

(a) MQ $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $K_\varepsilon := \{x \in X \mid \text{dist}(x,K) \leq \varepsilon\} \subseteq \mathcal{U}$.

Notons d'abord que $\mathcal{U} \supseteq K$ est un recouvrement ouvert de K. Par le #3, $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall x \in K$, $B(x,\delta) \subseteq \mathcal{U}$. Posons $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$. Soit $x \in K_\varepsilon$. Alors $\text{dist}(x,K) = \inf_{y \in K} d(x,y) \leq \varepsilon$, d'où $\exists y \in K$ t.q. $d(x,y) < 2\varepsilon$ et $x \in B(y, 2\varepsilon) = B(y,\delta) \subseteq \mathcal{U}$

↳ sinon, $d(x,y) \geq 2\varepsilon \ \forall y \in K$, d'où $\inf_{y \in K} d(x,y) \geq 2\varepsilon$ ⨳

(b) MQ si K est fermé mais non compact, alors il est possible que a) soit faux.

On peut prendre $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ et $\mathcal{U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |xy| < 1\}$. Alors $K \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ est ouvert, K est fermé, mais K n'est pas compact.

Dans ce cas, le a) n'est pas satisfait : soit $\varepsilon > 0$. Considérons $(x,y) = (\frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2$. On a $|xy| = 1$, d'où $(x,y) \notin \mathcal{U}$, mais $\text{dist}((x,y),K) \leq d((x,y),(\frac{1}{\varepsilon},0)) = \varepsilon$, donc $(x,y) \in K_\varepsilon$ et $K_\varepsilon \nsubseteq \mathcal{U}$.

#5 Soit (X,d) un espace métrique, $F \subseteq X$ un fermé dans X et $K \subseteq X$ un compact tels que $F \cap K = \emptyset$. MQ $\exists r > 0$ t.q. $d(x,y) \geq r \;\; \forall x \in F, y \in K$.

Comme $F \cap K = \emptyset$, $K \subseteq F^c$ et F^c est ouvert, car F est fermé. Par le #4, $\exists r > 0$ t.q. $K_r \subseteq F^c$. Alors, $\forall x \in F$ et $\forall y \in K$, $d(x,y) \geq \operatorname{dist}(x,K) > r$ (car $x \notin K_r$).

$\square$