EXERCICES DE LA SÉRIE #2

#3 Quelles sont les fonctions $f : (\mathbb{R}, d_2) \to (\mathbb{R}, d)$ qui sont continues lorsque d est la métrique discrète ?

Par définition, une fonction $f : (\mathbb{R}, d_2) \to (\mathbb{R}, d)$ est continue ssi $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ t.q. $d_2(x,a) < \delta$ $\Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Comme d est la métrique discrète, on a

$$d(f(x), f(a)) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) = f(a) \\ 1 & \text{si } f(x) \neq f(a) \end{cases}$$

Ainsi, en prenant $\varepsilon \leq 1$ dans la définition, on doit pouvoir trouver $\delta > 0$ t.q. $d(f(x), f(a)) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ t.q. $d_2(x,a) < \delta$, c'est-à-dire que $f(x) = f(a)$ $\forall x \in B(a, \delta)$.

On conclut que f est continue ssi f est constante : soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et posons $y = f(x_0)$. Considérons $E = f^{-1}(y)$.

- E est ouvert : soit $x \in E$. Alors $f(x) = y$. Par les résultats ci-haut, $\exists \delta > 0$ t.q. $d_2(x', x) < \delta \Rightarrow f(x') = f(x) = y$. Ceci donne $B(x, \delta) \subseteq E$.
- E est fermé : soit $x \in E^c$. Alors $f(x) = z \neq y$. Par les résultats ci-haut, $\exists \delta > 0$ t.q. $d_2(x', x) < \delta \Rightarrow f(x') = f(x) = z$. Ceci donne $B(x, \delta) \subseteq E^c$. Donc E^c est ouvert et E est fermé.

Comme E est ouvert, fermé et non vide, on conclut que $E = \mathbb{R}$, d'où $f(x) = y$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et f est constante.

#5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Soit $L \subseteq \mathbb{R}^2$ une droite passant par l'origine. MQ si $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de L t.q. $(x_n, y_n) \to (0,0)$ lorsque $n \to \infty$, alors $f(x_n, y_n) \to f(0,0)$ lorsque $n \to \infty$.

Si $(x_n, y_n) \in L$, alors $y_n = a x_n$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$ (ou $x_n = a y_n$). On a alors

$$f(x_n, y_n) = f(x_n, a x_n) = \frac{(x_n)^2 (a x_n)}{x_n^4 + a^2 x_n^2}$$

$$\underset{\text{si } a \neq 0}{=} \frac{a x_n}{a^2 + x_n^2}$$

$$\leqslant \frac{a x_n}{a^2} = \frac{x_n}{a} \longrightarrow 0 = f(0,0),$$

et similairement pour une droite de la forme $x = ay$.

Si $a = 0$, $f(x_n, a x_n) = 0 \to 0 = f(0,0)$ aussi, tel que désiré.

(b) La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

Non! Considérons par exemple la suite $((\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}))_{n \in \mathbb{N}}$.

Alors $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}) \to (0,0)$ $(n \to \infty)$, mais

$$f\left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n^2}\right) = \frac{(\frac{1}{n})^2 (\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^4} + (\frac{1}{n^2})^2} = \frac{1/n^4}{2/n^4} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq f(0,0),$$

d'où f n'est pas continue en $(0,0)$.

#14 On considère l'espace métrique $(C[a,b], d_1)$ et la fonction $T : C[a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $T(f) = \int_a^b |f|$. Est-ce que T est

☑ continue ?

☑ uniformément continue ?

☑ Lipschitz ?

☒ une isométrie ?

Soient $f, g \in C[a,b]$. On a

$$
\begin{aligned}
d_2(T(f), T(g)) &= |T(f) - T(g)| \\
&= \left| \int_a^b |f| - \int_a^b |g| \right| \\
&\overset{\Delta}{\leqslant} \int_a^b \big| |f| - |g| \big| \\
&\leqslant \int_a^b |f - g| \\
&= d_1(f,g),
\end{aligned}
$$

monotonicité de $\int$ $\left(|f(x) - g(x)| \geqslant \big||f(x)| - |g(x)|\big| \geqslant 0 \ \forall x \in [a,b] \right)$

d'où T est 1-Lipschitz. Elle est donc aussi uniformément continue et continue.

Par contre, T n'est pas une isométrie. Par exemple, pour $f : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$

$g : [a,b] \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 - \frac{x-a}{b-a}$

on a $T(f) = \int_a^b \left| \frac{x-a}{b-a} \right| dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b - a = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} - a = \frac{b-a}{2}$

$T(g) = \int_a^b \left| 1 - \frac{x-a}{b-a} \right| dx = \dots = \frac{b-a}{2}$.

Donc $d_2(T(f), T(g)) = \left| \frac{b-a}{2} - \frac{b-a}{2} \right| = 0$.

Mais $d_1(f,g) = \int_a^b |f - g| = \int_a^b \left| \frac{x-a}{b-a} - \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right) \right| dx$

$= \int_a^b 1 \, dx = b - a \neq 0$.

□

#16 (a) Trouver une fonction $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ continue et surjective.

On peut prendre $f : (0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, par exemple.

(b) Puisque $\mathbb{R}$ est ouvert, la fonction en (a) est-elle un contrexemple au théorème affirmant que $f^{-1}(\mathbb{R})$ est ouvert ?

Non ! Dans l'exemple précédent, $f^{-1}(\mathbb{R}) = (0,1]$ est un ouvert dans l'espace métrique $((0,1], d_2)$.
Plus généralement, $\forall f : (X,d) \to \mathbb{R}$ continue (où (X,d) est un espace métrique), on a $f^{-1}(\mathbb{R}) = X$, qui est ouvert dans (X,d).

#18 On suppose que $C[0,1]$ est muni d'une métrique d. On définit $T : C[0,1] \to \mathbb{R}$ par $T(f) = f(0)$. On pose $E = \{ f \in C[0,1] \mid f(0) = 1 \}$.

(a) T est-elle continue si $d = d_\infty$?

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $f \in C[0,1]$. Posons $\delta = \varepsilon > 0$ et soit $g \in C[0,1]$ t.q. $d_\infty(g,f) < \delta$. En particulier,

$$|g(0) - f(0)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |g(x) - f(x)| = d_\infty(g,f) < \delta,$$

d'où

$$d_2(T(g), T(f)) = |g(0) - f(0)| < \delta = \varepsilon.$$

Donc T est continue (en fait, le δ qu'on a trouvé ne dépend pas de f et T est même uniformément continue).

(b) E est-il fermé si $d = d_\infty$?

Notons que $E = T^{-1}(\{1\})$. Comme T est continue par le (a) et comme $\{1\}$ est fermé dans $(\mathbb{R}, d_2)$, on conclut que E est fermé.

(c) T est-elle continue si $d = d_1$?

Considérons la suite $f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \max\{1 - nx, 0\}$. Alors $f_n \in C[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $f_n \xrightarrow{d_1} 0$:

$$d_1(f_n, 0) = \int_0^1 |\max\{1 - nx, 0\} - 0| \, dx$$
$$= \int_0^{1/n} |1 - nx| \, dx = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

Or, $T(f_n) = f_n(0) = 1 \not\to 0 = T(0)$ dans $(\mathbb{R}, d_2)$, donc T n'est pas continue.

(d) E est-il fermé si $d = d_1$?

Non (on l'a montré au TP2). En fait, ceci implique (c), car si T était continue, on aurait que E est fermé par le même argument qu'au (b).

$\square$

#19 Deux espaces métriques (X,d) et (Y,d') sont dits **isométriques** s'il existe une isométrie surjective de X dans Y.

(a) MQ s'il existe une isométrie surjective de X dans Y, alors il en existe une de Y dans X, ce qui justifie la définition précédente.

Soit $f : X \to Y$ une isométrie surjective. Soient $x_1, x_2 \in X$ t.q. $f(x_1) = f(x_2)$. Alors $0 = d'(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Donc f est aussi injective. Elle possède un inverse $f^{-1} : Y \to X$. Montrons que f^{-1} est une isométrie :
soient $y_1, y_2 \in Y$. Comme f est surjective, $\exists x_1, x_2 \in X$ t.q. $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$. Alors

$$\begin{aligned} d(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) &= d(f^{-1}(f(x_1)), f^{-1}(f(x_1))) \\ &= d(x_1, x_2) \\ &= d'(f(x_1), f(x_2)) \quad \text{car } f \text{ est une isométrie} \\ &= d'(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Donc $f^{-1} : Y \to X$ est une isométrie.

(b) MQ $([0,1], d_2)$ et $([0,2], d_2)$ ne sont pas isométriques.

Soit $f : [0,2] \to [0,1]$. On a $d_2(2,0) = |2-0| = 2$, mais $d_2(f(2), f(0)) = |f(2) - f(0)| \leq 1 < 2$, car $f(2), f(0) \in [0,1]$. Donc il n'existe pas d'isométrie de $([0,2], d_2)$ dans $([0,1], d_2)$, d'où ils ne sont pas isométriques par le (a).

$\square$

#22 Soient (X,d) et (Y,d') des espaces métriques discrets. On suppose qu'il existe une bijection $f: X \to Y$.

(a) MQ X et Y sont homéomorphes.

Montrons que f est continue : soit $x_0 \in X$ et soit $\varepsilon > 0$.
Comme (X,d) est discret, $\exists \delta > 0$ t.q. $B(x_0, \delta) = \{x_0\}$.
Alors, $\forall x \in X$ t.q. $d(x, x_0) < \delta$, on a en fait $x = x_0$
et donc $d'(f(x), f(x_0)) = d'(f(x_0), f(x_0)) = 0 < \varepsilon$.
Donc f est continue.
Soit $f^{-1}: Y \to X$ l'inverse de f (qui existe car f est bijective). Par la même démarche que ci-haut, on peut montrer que f^{-1} est continue.
On conclut que $f: X \to Y$ est un homéomorphisme.

(b) MQ si X et Y sont de plus uniformément discrets, alors ils sont uniformément homéomorphes.

La même preuve qu'au (a), en notant que le δ ne dépend pas du point $x_0 \in X$ si (X,d) est uniformément discret, montre que dans ce cas f est unif. continue.
Similairement pour f^{-1}.
Alors f est un homéomorphisme uniforme. $\square$

#23 MQ la propriété « posséder exactement n points isolés » est une propriété topologique.

Soit (X,d) un espace topologique possédant n points isolés $x_1, \dots, x_n$ et soit $f : (X,d) \to (Y,d')$ un homéomorphisme.

Alors $f^{-1} : Y \to X$ est une fonction continue. Alors chaque $f(x_i)$, $i=1,\dots,n$ est un point isolé :

soit $\varepsilon_i > 0$ t.q. $B(x_i, \varepsilon_i) = \{x_i\}$. Comme f^{-1} est continue en $f(x_i)$, $\exists\, \delta_i > 0$ t.q. $y \in B(f(x_i), \delta_i) \Rightarrow f^{-1}(y) \in B(f^{-1}(f(x_i)), \varepsilon_i)$ $= B(x_i, \varepsilon_i) = \{x_i\}$. Comme f^{-1} est injective, on en déduit que $y \in B(f(x_i), \delta_i) \Rightarrow y = f(x_i)$, d'où $B(f(x_i), \delta_i) = \{f(x_i)\}$ et c'est un point isolé.

En utilisant la continuité de f, on peut montrer de la même façon que chaque point isolé de (Y,d') est envoyé par f^{-1} sur un point isolé de (X,d).

On obtient donc une correspondance bijective entre les points isolés de deux espaces homéomorphes, d'où la propriété « posséder exactement n points isolés » est topologique.

$\square$