EXERCICES DE LA SÉRIE #1. (SUITE) (SUITE)

#7 (a) Soit $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}^k$ muni de la métrique d_∞. MQ $x^{(n)} \to x$ dans $(\mathbb{R}^k, d_\infty)$ ssi $x_i^{(n)} \to x_i$ (convergence usuelle dans $\mathbb{R}$) $\forall i \in \{1, \dots, k\}$.

($\Rightarrow$) Supposons que $x^{(n)} \to x$ dans $(\mathbb{R}^k, d_\infty)$. Alors, par définition,

$$d_\infty(x^{(n)}, x) = \max_{1\leq j\leq k} |x_j^{(n)} - x_j| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

En particulier, $\forall\, 1 \leq i \leq k$,

$$0 \leq |x_i^{(n)} - x_i| \leq \max_{1\leq j\leq k} |x_j^{(n)} - x_j| \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

d'où $|x_i^{(n)} - x_i| \to 0$ par sandwich. Or ceci veut dire que $x_i^{(n)} \to x_i$ dans $\mathbb{R}$, tel que désiré.

($\Leftarrow$) Supposons que $x_i^{(n)} \to x_i$ $\forall\, 1 \leq i \leq k$. Alors, par définition, $|x_i^{(n)} - x_i| \to 0$ $(n\to\infty)$ $\forall i$.

Alors

$$d_\infty(x^{(n)}, x) = \max_{1\leq j\leq k} |x_j^{(n)} - x_j| \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty)$$

aussi, d'où $x^{(n)} \to x$ dans $(\mathbb{R}^k, d_\infty)$.

(b) Pour toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^k$, MQ $x^{(n)}$ converge vers x dans $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ ssi $x_i^{(n)} \to x_i$ dans $\mathbb{R}$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$.

Équivalence des normes sur $\mathbb{R}^k$.

Déf : Soient X un espace vectoriel et $\|\cdot\|_*$, $\|\cdot\|_0$ deux normes sur X. On dit que ces normes sont **équivalentes** si $\exists\, c, d > 0$ t.q. $c\|x\|_0 \leq \|x\|_* \leq d\|x\|_0$ $\forall x \in X$ (avec c, d indép. de x).

Thm : Dans $\mathbb{R}^k$, toutes les normes sont équivalentes.

Par le thm, $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, alors $\exists c_1, d_1, c_2, d_2 > 0$ t.q.

$$c_1 \| y \| \leqslant \| y \|_\infty \leqslant d_1 \| y \| \quad \text{et} \quad c_2 \| y \|_\infty \leqslant \| y \| \leqslant d_2 \| y \|_\infty, \quad \forall y \in \mathbb{R}^k$$

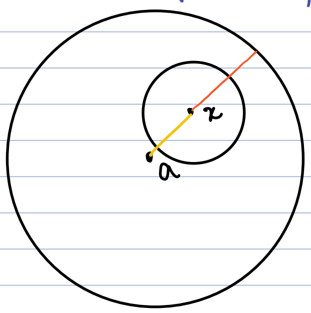
d'où $\|x^{(n)} - x\| \to 0 \iff \|x^{(n)} - x\|_\infty \to 0$ par sandwich.

Par le (a), on a $\|x^{(n)} - x\|_\infty \to 0 \iff x_i^{(n)} \to x_i$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. Donc

$$x^{(n)} \to x \text{ dans } (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|) \iff x_i^{(n)} \to x_i \text{ dans } \mathbb{R} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

$\square$

#11 Soit (X,d) un espace métrique. Soit $a \in X$ et $r>0$. MQ $\mathring{B}(a,r)$ est ouvert dans X.



Soit $x \in \mathring{B}(a,r)$. On cherche $s>0$ t.q. $B(x,s) \subseteq \mathring{B}(a,r)$.

Posons $s = \min\{r - d(a,x),\ d(a,x)\}$.

Soit $y \in B(x,s)$ (donc $d(x,y)<s$). On a

- $d(a,y) \leqslant d(a,x) + d(x,y)$ par Δ

$$< d(a,x) + s$$
$$\leqslant d(a,x) + r - d(a,x) = r$$

$\Rightarrow y \in B(a,r)$.

- $d(a,y) \geqslant |d(a,x) - d(x,y)|$

$$\geqslant |d(a,x)| - |d(x,y)|$$
$$= d(a,x) - d(x,y)$$
$$> d(a,x) - d(a,x) = 0,$$

d'où en particulier $y \neq a$. Alors $y \in \mathring{B}(a,r)$.

Comme $y \in B(x,s)$ est arbitraire, on conclut que $B(x,s) \subseteq \mathring{B}(a,r)$.

Comme $x \in \mathring{B}(a,r)$ est arbitraire, on conclut que $\mathring{B}(a,r)$ est ouvert. $\square$

#18 Soit (X,d) un espace métrique et soit $E \subseteq X$.
MQ x est un point isolé de E ssi il existe un voisinage ouvert V de x tel que $V \cap E = \{x\}$.

Rappel : Déf : Soit (X,d) un espace métrique et $E \subseteq X$.

1) $x \in X$ est un **point limite** de E si $\forall r > 0$, $\dot{B}(x,r) \cap E \neq \phi$.
2) L'ensemble des points limites de E est noté E'.
3) $x \in X$ est un **point isolé** de E si $x \in E \setminus E'$.

Soit $x \in X$ un pt isolé de E, c-à-d $x \in E \setminus E'$. Comme $x \notin E'$, $\exists r > 0$ t.q. $\dot{B}(x,r) \cap E = \phi$.
Alors $B(x,r)$ est un voisinage de x et
$x \in B(x,r)$, $x \in E \Rightarrow B(x,r) \cap E = \{x\}$.

$\square$

#19 Soit (X,d) un espace métrique. MQ $\forall E \subseteq X$, E' est fermé.

Soit $x \in (E')^c$. Alors $\exists r>0$ t.q. $\dot{B}(x,r) \cap E = \emptyset$.

Montrons que $B(x,r) \subseteq (E')^c$:

Soit $y \in B(x,r)$. Comme $\dot{B}(x,r)$ est ouvert, $\exists s>0$ t.q. $B(y,s) \subseteq \dot{B}(x,r)$. Alors

$$\dot{B}(y,s) \cap E \subseteq B(y,s) \cap E \subseteq \dot{B}(x,r) \cap E = \emptyset,$$

d'où $y \notin E'$.

On en conclut que $B(x,r) \subseteq (E')^c$.

$\Rightarrow (E')^c$ est ouvert $\Rightarrow E'$ est fermé. $\square$

#20 Donner un exemple d'ensemble E dans $(\mathbb{R}, d_2)$ tel que

(a) $E' = \mathbb{Z}$

On peut prendre $E = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{m + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(b) $E \neq \emptyset$ et $E = E'$

On peut prendre $E = [0,1]$.

(c) $(E')' \neq \emptyset$ et $(E')' \neq E'$.

On peut prendre $E = [0,1] \cup \{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

#24 Soit (X,d) un espace métrique.

(a) MQ une intersection dénombrable de G_δ est un G_δ. De même, MQ une union dénombrable de F_σ est un F_σ.

Soient $G_1, G_2, \dots$ des ensembles G_δ. Alors, chacun est de la forme $G_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_{i,n}$, où les $U_{i,n}$ sont ouverts. On a alors

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_{i,n}\right) = \bigcap_{i,n=1}^{\infty} U_{i,n},$$

qui est une intersection dénombrable d'ouverts, c'est-à-dire un G_δ.

De même, soient $E_1, E_2, \dots$ des ensembles F_σ. Alors chacun est de la forme $E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{i,n}$ où les $F_{i,n}$ sont fermés. On a donc

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_{i,n}\right) = \bigcup_{i,n=1}^{\infty} F_{i,n},$$

qui est une union dénombrable de fermés, c'est-à-dire un F_σ.

(b) MQ E est un G_δ ssi $X \setminus E$ est un F_σ.

($\Rightarrow$) Soit $E = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ un G_δ, avec U_i ouvert $\forall i$. Alors

$$X \setminus E = E^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty}(U_i^c)$$

par la loi de De Morgan pour les intersections infinies. Comme les U_i sont ouverts, les U_i^c sont fermés par définition ($(U_i^c)^c = U_i$ est ouvert). $X \setminus E$ est donc une union dénombrable de fermés, c'est-à-dire un F_σ.

($\Leftarrow$) Supp. que $X \setminus E$ est un F_σ. Alors $X\setminus E = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ avec F_i fermé $\forall i$. Alors

$$E = (X\setminus E)^c = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} (F_i^c),$$

où on a utilisé la loi de De Morgan pour les unions infinies. F_i^c est ouvert $\forall i$ par définition, donc E est une intersection dénombrable d'ouverts, c'est-à-dire un G_δ.

(c) MQ (a,b), $(a,b]$ et $[a,b]$ sont des F_σ et G_δ dans $(\mathbb{R}, d_2)$.

<u>(a,b)</u> : On peut écrire $(a,b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a,b)$ $\quad (G_\delta)$

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a+\tfrac{1}{n}, b-\tfrac{1}{n}\right] \qquad (F_\sigma)$$

$(a,b]$: On peut écrire $(a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a, b+\tfrac{1}{n}\right)$ $\quad (G_\delta)$

$$(a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a+\tfrac{1}{n}, b\right] \qquad (F_\sigma)$$

$[a,b]$: On peut écrire $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(a-\tfrac{1}{n}, b+\tfrac{1}{n}\right)$ $\quad (G_\delta)$

$$[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a,b] \qquad (F_\sigma)$$

(d) MQ l'union des droites passant par l'origine et de pentes rationnelles est un F_σ.

Soit $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une énumération des rationnels. Pour chaque $r_i \in \mathbb{Q}$, posons

$$D_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = r_i x\}$$

la droite de pente r_i passant par l'origine dans $\mathbb{R}^2$.

Montrons que D_i est fermé pour tout i :

soit $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D_i$ une suite t.q. $(x_n, y_n) \to (x_*, y_*) \in \mathbb{R}^2$. Alors, par le #7, $x_n \to x_*$ et $y_n \to y_*$ dans $\mathbb{R}$.

On a $y_n = r_i x_n \;\forall n \in \mathbb{N}$, car $(x_n, y_n) \in D_i$, et donc $y_n = r_i x_n \longrightarrow r_i x_*$ $(n \to \infty)$, d'où $y_* = r_i x_*$ et $(x_*, y_*) = (x_*, r_i x_*) \in D_i$.

Donc D_i est fermé $\forall i \in \mathbb{N}$.

Alors $\bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ est un F_σ.

$\square$

#26 Soit (X,d) un espace métrique. MQ les énoncés suivants sont équivalents :

1. E est dense dans X
2. $\forall x \in X$, $\exists (x_n) \subseteq E$ t.q. $x_n \to x$.
3. $\forall x \in X$ et $\forall r>0$, $B(x,r) \cap E \neq \emptyset$.

Rappel : $E \subseteq X$ est **dense** dans X si $\overline{E} = X$.

$(1 \Rightarrow 2)$ Soit $x \in X$. Alors $x \in \overline{E}$, d'où, par une prop. vue en classe, $\exists (x_n) \subseteq E$ t.q. $x_n \to x$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Soit $x \in X$. Soit $(x_n) \subseteq E$ t.q. $x_n \to x$. Alors, $\forall r>0$, $\exists N$ t.q. $\forall n \geq N$, $d(x_n, x) < r$, c-à-d que $x_n \in B(x,r) \cap E$ $\forall n \geq N$. En particulier, $B(x,r) \cap E \neq \emptyset$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Soit $x \in X$. Si $x \in E$, alors $x \in \overline{E} = E \cup E'$.
Sinon, comme $B(x,r) \cap E \neq \emptyset$ $\forall r>0$ et comme $B(x,r) \cap E = \dot{B}(x,r) \cap E$, on obtient que $\dot{B}(x,r) \cap E \neq \emptyset$ $\forall r>0$, d'où $x \in E' \subseteq E \cup E' = \overline{E}$.
Donc $X \subseteq \overline{E}$. Comme $\overline{E} \subseteq X$, on obtient $\overline{E} = X$, d'où E est dense dans X. $\square$

#27 MQ l'intersection de deux ensembles denses dans un espace métrique n'est pas nécessairement dense dans cet espace.

Dans $(\mathbb{R}, d_2)$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont des ensembles denses, mais $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$ n'est pas dense dans $(\mathbb{R}, d_2)$.

#29 Soit $w \in C[a,b]$ t.q. $w \geq 0$ sur $[a,b]$. Pour $f,g \in C[a,b]$, on définit

$$d_w(f,g) = \int_a^b |f-g|w$$

MQ d_w définit une métrique sur $C[a,b]$ ssi $Z := \{x \in [a,b] \mid w(x) = 0\}$ est nulle part dense dans $[a,b]$.

Rappel : $E \subseteq X$ est **nulle part dense** dans X si $(\bar{E})^\circ = \phi$.

On a clairement $d_w(f,g) = d_w(g,f)$ et l'inégalité du triangle est respectée, car $\forall x \in [a,b]$,

$$|f(x)-h(x)|w(x) \leq (|f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|)w(x)$$
$$= |f(x)-g(x)|w(x) + |g(x)-h(x)|w(x)$$
$$\Rightarrow \int_a^b |f-h|w \leq \int_a^b |f-g|w + \int_a^b |g-h|w,$$

où on a utilisé le fait que $w(x) \geq 0$, la monotonicité et la linéarité de l'intégrale.

Tout se joue donc dans la propriété 1.

($\Rightarrow$) Supposons que Z n'est pas nulle part dense dans $[a,b]$ et soit $y \in (\bar{Z})^\circ$. Alors $\exists r > 0$ t.q. $B(y,r) \subseteq \bar{Z}$. Montrons que $\bar{Z} = Z$, c-à-d que Z est fermé : soit $(z_n) \subseteq Z$ t.q. $z_n \to z \in [a,b]$. On a $w(z_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, d'où par continuité de w,

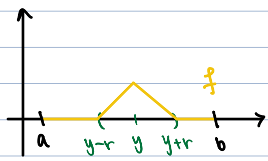
$$w(z) = \lim_{n\to\infty} w(z_n) = 0 \Rightarrow z \in Z.$$

Alors on a en fait $B(y,r) \subseteq Z = \bar{Z}$, et

$w(x)=0 \quad \forall x \in B(y,r)$.

Posons $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\notin B(y,r) \\ r-|x-y| & \text{si } x\in B(y,r) \end{cases}$$



Alors f est continue sur tout $[a,b]$. (Il faut vérifier en $y-r$, $y+r$, et c'est clair partout ailleurs).

On a aussi $|f-0|w=0$ sur tout $[a,b]$, d'où $0=\int_a^b |f-0|w = d_w(f,0)$, mais $f\neq 0$. Alors d_w n'est pas une métrique.

($\Leftarrow$) Supposons que d_w n'est pas une métrique. Alors $\exists f,g \in C[a,b]$ t.q. $f\neq g$ et $d_w(f,g)=0$.

On a donc $0=d_w(f,g)=\int_a^b |f-g|w$, d'où $|f(x)-g(x)|w(x)=0 \ \forall x\in[a,b]$, car $|f-g|w\geq 0$.

Soit $y\in[a,b]$ t.q. $f(y)\neq g(y)$.

Par continuité, $\exists r>0$ t.q. $f(x)\neq g(x) \ \forall x\in(y-r,y+r)$ et on a $0\leq \int_{y-r}^{y+r}|f-g|w \leq \int_a^b |f-g|w=0$, d'où $|f-g|w=0$ sur $(y-r,y+r)$ car $|f-g|w\geq 0$. Comme $|f(x)-g(x)|\neq 0$, on doit avoir $w(x)=0$ $\forall x\in(y-r,y+r)$. Mais alors $y\in(\overline{Z})^\circ$, donc w n'est pas nulle part dense.

$\square$