Rappel : Dispo : Lundi 12h30–14h30 (AA-5247)

EXERCICES DE LA SÉRIE #1. (SUITE)

#8 Soit $f, g \in C^1[0,2\pi]$. On pose

$$d(f,g) := |f(\pi) - g(\pi)| + \sup_{x\in[0,2\pi]} |f'(x) - g'(x)| < \infty$$

(a) MQ d est une métrique sur $C^1[0,2\pi]$.

(1)
$$\begin{aligned}
d(f,g) = 0 &\Leftrightarrow |f(\pi) - g(\pi)| + \sup_{x\in[0,2\pi]} |f'(x) - g'(x)| = 0 \\
&\Leftrightarrow f(\pi) = g(\pi) \text{ et } f'(x) = g'(x) \ \forall x \in [0,2\pi] \\
&\Leftrightarrow f(\pi) = g(\pi) \text{ et } (f-g)'(x) = 0 \ \forall x \in [0,2\pi] \\
&\Leftrightarrow f(\pi) = g(\pi) \text{ et } f-g = \text{cste} \\
&\Leftrightarrow f = g \text{ dans } C^1[0,2\pi]
\end{aligned}$$

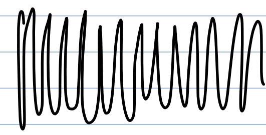
(2) $d(f,g) = |\cdots| + \sup |\cdots| = d(g,f)$ ✓

(3)
$$\begin{aligned}
d(f,h) &= |f(\pi) - h(\pi)| + \sup_{x\in[0,2\pi]} |f'(x) - h'(x)| \\
&= |f(\pi) - g(\pi) + g(\pi) - h(\pi)| \\
&\quad + \sup_{x\in[0,2\pi]} |f'(x) - g'(x) + g'(x) - h'(x)| \\
&\leq |f(\pi) - g(\pi)| + |g(\pi) - h(\pi)| \\
&\quad + \sup_{x\in[0,2\pi]} \left(|f'(x) - g'(x)| + |g'(x) - h'(x)|\right) \\
&\leq |f(\pi) - g(\pi)| + |g(\pi) - h(\pi)| \\
&\quad + \sup_{x\in[0,2\pi]} |f'(x) - g'(x)| + \sup_{x\in[0,2\pi]} |g'(x) - h'(x)| \\
&= d(f,g) + d(g,h) \ ✓
\end{aligned}$$

Donc d est une métrique sur $C^1[0,2\pi]$.

(b) Calculer, si elle existe, la limite des suites suivantes dans cet espace métrique.

(i) $f_n(x) = \sin(nx)$ $\quad f_n'(x) = n \cdot \cos(nx)$



Soit $g \in C^1[0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} d(f_n, g) &= |f_n(\pi) - g(\pi)| + \sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n'(x) - g'(x)| \\ &= |\sin(n\pi) - g(\pi)| + \sup_{x\in[0,2\pi]} |n\cos(nx) - g'(x)| \\ &= |g(\pi)| + \sup_{x\in[0,2\pi]} |n\cos(nx) - g'(x)| \\ &\geq |n \cdot \cos(n \cdot 0) - g'(0)| \\ &\geq |n \cdot 1| - |g'(0)| \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Donc la suite diverge dans $C^1[0, 2\pi]$.

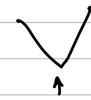
(ii) $f_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right)$ $\quad \underline{f_n'(x) = \frac{-1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)}$

Soit $g \in C^1[0, 2\pi]$.
définie par $g(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} d(f_n, g) &= |f_n(\pi) - g(\pi)| + \sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n'(x) - g'(x)| \\ &= \underbrace{\left|\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - 1\right|}_{\to 0} + \underbrace{\sup_{x\in[0,2\pi]} \left|\frac{-1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right) - 0\right|}_{\to 0} \end{aligned}$$

car $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \cos(0) = 1$ $\qquad$ car $\left|\frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$

Donc $d(f_n, g) \to 0$ $(n \to \infty)$, d'où $f_n \to g$ dans $C^1[0, 2\pi]$.

(iii) $f_n(x) = \left|\frac{x-\pi}{\pi}\right|^{\frac{1+n}{n}} = \left|\frac{x-\pi}{\pi}\right|^{1+\frac{1}{n}}$ $\quad \left|\frac{x-\pi}{\pi}\right|$ 

Vérifions que $f_n \in C^1[0,2\pi]$ et calculons sa dérivée :

- sur $[0,\pi)$: $\left|\frac{x-\pi}{\pi}\right|^{1+\frac{1}{n}} = \left(\frac{\pi-x}{\pi}\right)^{1+\frac{1}{n}}$ et

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = -\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\pi-x}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \leftarrow$$

- en π : vérifions que $f_n'(\pi) = 0$. On a

$$\lim_{x\to\pi}\left|\frac{f_n(x)-f_n(\pi)}{x-\pi}\right| = \lim_{x\to\pi}\left|\left|\frac{x-\pi}{\pi}\right|^{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{x-\pi}\right|$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left|\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1+\frac{1}{n}} \cdot (x-\pi)^{\frac{1}{n}} \cdot \cancel{\frac{x-\pi}{x-\pi}}\right|$$

$$= \lim_{x\to\pi}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{1+\frac{1}{n}} |x-\pi|^{\frac{1}{n}}$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

Alors $\lim_{x\to\pi}\frac{f_n(x)-f_n(\pi)}{x-\pi} = 0$.

- Sur $(\pi, 2\pi]$: $\left|\frac{x-\pi}{\pi}\right|^{1+\frac{1}{n}} = \left(\frac{x-\pi}{\pi}\right)^{1+\frac{1}{n}}$

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{x-\pi}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Supposons qu'il existe $g \in C^1[0,2\pi]$ t.q. $f_n \to g$. Alors $d(f_n,g) \to 0$, d'où

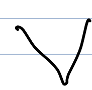
- $|f_n'(\pi) - g'(\pi)| \leq \sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n'(x) - g'(x)|$

$$\leq d(f_n,g) \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow |f_n'(\pi) - g'(\pi)| \longrightarrow 0$

$\Rightarrow |0 - g'(\pi)| \longrightarrow 0$

$\Rightarrow g'(\pi) = 0.$



- $\forall\, 0 < \delta \leqslant \pi, \quad |f_n'(\pi+\delta) - g'(\pi+\delta)| \leqslant d(f_n, g) \to 0$

  $\Rightarrow \left| \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{(\pi+\delta)-\pi}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}} - g'(\pi+\delta) \right| \longrightarrow 0$

  $\Rightarrow g'(\pi+\delta) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\delta}{\pi}\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

Or, on a alors

$$\lim_{x\to\pi^+} g'(x) = \lim_{x\to\pi^+} 1 = 1 \neq 0 = g'(\pi),$$

d'où g n'est pas continue en π. ※

Donc la limite n'existe pas.

Soit $\ell^\infty := \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \}$, l'ensemble des suites réelles bornées. On définit $d_\infty : \ell^\infty \times \ell^\infty \to [0,\infty)$ par $d_\infty(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$.

On définit $c_0 := \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \}$ l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0.

#10 Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on pose $x^{(n)} := \left(\frac{n}{n+i}\right)_{i\in\mathbb{N}}$.

(a) Vérifier que $x^{(n)} \in \ell^\infty$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

On a $\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i^{(n)}| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \left|\frac{n}{n+i}\right| \leq \sup_{i\in\mathbb{N}} \left|\frac{n}{n}\right| = 1$, car $n+i > n$. Donc $\sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i^{(n)}| < \infty$, d'où $x^{(n)} \in \ell^\infty$.

(b) Déterminer si $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (ℓ^∞, d_∞)

Supposons que $x^{(n)} \to y$ dans (ℓ^∞, d_∞). Alors

$$d_\infty(x^{(n)}, y) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i^{(n)} - y_i| = \sup_{i\in\mathbb{N}} \left|\frac{n}{n+i} - y_i\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

En particulier, $\forall i \in\mathbb{N}$,

$$\left|\frac{n}{n+i} - y_i\right| \to 0 \Rightarrow y_i = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+i} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+i/n} = 1$$

Donc $y_i = 1$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

Or, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\left|\frac{n}{n+i} - 1\right| = \left|\frac{n-n-i}{n+i}\right| = \frac{i}{n+i} = \frac{1}{1+\frac{n}{i}}$.

En particulier, pour $i = 2n$, on a

$$|x_{2n}^{(n)} - y_{2n}| = \left|\frac{n}{n+2n} - 1\right| = \left|\frac{n}{3n} - 1\right| = \frac{2}{3},$$

d'où, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$d_\infty(x^{(n)}, y) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i^{(n)} - y_i| \geq |x_{2n}^{(n)} - y_{2n}| = \frac{2}{3},$$

ce qui est absurde, car $x^{(n)} \to y$. $\divideontimes$

On conclut que $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas dans (ℓ^∞, d_∞).

(c) Montrer que $x^{(n)} \in c_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{i\to\infty} x_i^{(n)} = \lim_{i\to\infty} \frac{n}{n+i} = 0 \Rightarrow x^{(n)} \in c_0.$$

(d) Déterminer si $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (c_0, d_∞).

Non, $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. Par la démarche au (b), on sait que si $x^{(n)} \to y$, alors $y = (1)_{i\in\mathbb{N}}$, mais $y \notin c_0$. #

#13 Peut-on trouver quatre ouverts $U_1, \ldots, U_4$ de $(\mathbb{R}, d_2)$ tels que $\bigcap_{n=1}^{4} U_n = [0, \infty)$?

Non.

On a vu en classe qu'une intersection finie d'ensembles ouverts est ouverte. Alors $\bigcap_{n=1}^{4} U_n$ est un ensemble ouvert, mais $[0,\infty)$ ne l'est pas ($0 \in [0,\infty) \setminus ([0,\infty))^\circ$).

$\forall x \in U \ \exists r > 0$ t.q. $B(x,r) \subset U$

Considérons $0 \in [0,\infty)$. Soit $r > 0$.

Alors $B(0,r) = (-r, r) \not\subseteq [0,\infty)$.

Par exemple $-\frac{r}{2} \in (-r, r)$

$\not\in [0,\infty)$

#14 Soit $d_1 : C[0,1] \times C[0,1] \to [0,\infty)$ définie par

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g| \quad < \infty$$

(a) MQ d_1 est une métrique.

Comme $|f(x)-g(x)| \geq 0 \ \forall x \in [0,1]$, $\int_0^1 |f-g| = 0$ ssi $|f(x)-g(x)| = 0 \ \forall x \in [0,1]$.

(Résultat d'analyse 2).

Avec ceci en main,

(1) $d_1(f,g) = 0 \iff \int_0^1 |f-g| = 0$
$\iff |f(x)-g(x)| = 0 \quad \forall x \in [0,1]$
$\iff f(x) = g(x) \quad \forall x \in [0,1]$
$\iff f = g$

(2) $d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g|$
$= \int_0^1 |g-f| = d_1(g,f)$

(3) $d_1(f,h) = \int_0^1 |f-h|$
$= \int_0^1 |f-g+g-h|$
$\leq \int_0^1 |f-g| + |g-h|$ par monotonicité de $\int$
$= \int_0^1 |f-g| + \int_0^1 |g-h|$ par linéarité de $\int$
$= d_1(f,g) + d_1(g,h)$ ✓

Donc d_1 est une métrique sur $C[0,1]$.

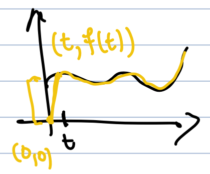
(b) On pose $E = \{ f \in C[0,1] \mid f(0) \neq 0 \}$. MQ $E^\circ = \emptyset$.

Rappel : $f \in E^\circ$ $(f \in E)$ $\iff \exists r > 0$ t.q. $B(f,r) \subseteq E$.

Soit $f \in E$. Soit $r > 0$. On veut montrer que $B(f,r) \not\subseteq E$.

Soit $M = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < \infty$ car f est continue sur un compact.

Considérons $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par



$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [t, 1] \\ \dfrac{f(t)}{t} \cdot x & \text{si } x \in [0, t) \end{cases}$$

où $t = \dfrac{r}{4M}$. Notons que g est continue.

De plus, on a

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g| = \int_0^t |f-g| + \cancel{\int_t^1 |f-g|}^{\,0}$$

$$= \int_0^t |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$= \int_0^t \left| f(x) - \frac{f(t)}{t} x \right| dx$$

$$\overset{\Delta}{\leq} \int_0^t |f(x)| + \left| \frac{f(t)}{t} x \right| dx$$

$$= \int_0^t \left(|f(x)| + \frac{x}{t} |f(t)| \right) dx$$

$$\leq \int_0^t \left(|f(x)| + \frac{t}{t} |f(t)| \right) dx$$

$$\leq \int_0^t M + M \, dx$$

$$= \int_0^t 2M\, dx = 2M \cdot t$$

$$= 2M \cdot \frac{r}{4M}$$

$$= \frac{r}{2} < r$$

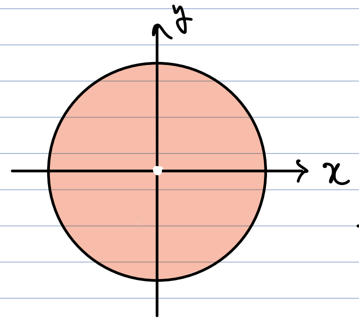
Alors $g \in B(f,r)$. Mais $g(0) = \frac{f(t)}{t} \cdot 0 = 0 \Rightarrow g \notin E$.

Alors $B(f,r) \not\subseteq E \Rightarrow f \notin E^\circ \Rightarrow E^\circ = \emptyset$.

$\square$

#16 Soient $X := \mathbb{R}^2$ et $Y := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ tous les deux munis de la métrique euclidienne d_2. Vrai ou faux? Justifier.

(d) $E := \{(x,y) \in X : 0 < x^2+y^2 \leqslant 1\}$ est fermé dans X.



FAUX! Considérons $(0,0) \in X \setminus E = E^c$.

Soit $r > 0$ et $p \in \underbrace{\dot{B}((0,0),s)}_{\subseteq B((0,0),r)}$ où $s = \min\{1, r\}$.

But: MQ $B((0,0),r) \not\subseteq E^c$.

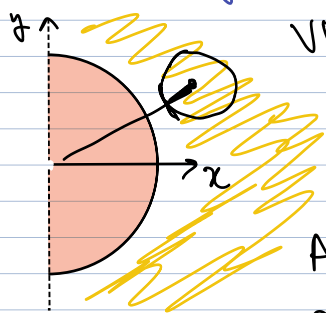
Alors $p \in B((0,0),r)$ et, en écrivant $p = (x,y)$, on a $d_2(p,(0,0)) = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < s \leqslant 1$, d'où $x^2+y^2 < 1^2 = 1$ (car $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0,\infty)$)

Alors $p = (x,y)$ avec $0 < x^2+y^2 < 1 \Rightarrow p \in E$.

Donc $B((0,0),r) \not\subseteq E^c$.

Comme r est arbitraire, on conclut que E^c n'est pas ouvert. Donc E n'est pas fermé dans X.

(e) $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2+y^2 \leqslant 1\}$ est fermé dans Y.



VRAI! Soit $p \in Y \setminus E = E^c$
$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, x^2+y^2 > 1\}$

Alors $p = (x,y)$ avec $x > 0$ et $x^2+y^2 > 1$.

On a aussi $d_2(p,0) = \sqrt{x^2+y^2} > \sqrt{1} = 1$

Soit $r = d_2(p,0) - 1 > 0$. On veut MQ $B(p,r) \subseteq E^c$.

Considérons $q = (x', y') \in B(p, r)$.

Alors $d_2(q,0) \geq |d_2(q,p) - d_2(p,0)|$ par TP#1 #2

$= |d_2(p,0) - d_2(q,p)|$

$\geq |d_2(p,0)| - |d_2(q,p)|$

$> d_2(p,0) - r = d_2(p,0) - (d_2(p,0) - 1)$

$= 1$.

Donc $\sqrt{x'^2 + y'^2} > 1 \Rightarrow x'^2 + y'^2 > 1^2 = 1$

Alors $q \in E^c$.

On conclut que $B(p,r) \subseteq E^c$.

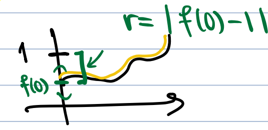
Alors E^c est ouvert dans $Y \Rightarrow E$ est fermé dans Y.

$\square$

#22 On considère sur $C[0,1]$ les métriques

$$d_1(f,g) = \int_0^1 |f-g| \quad \text{et} \quad d_\infty(f,g) = \sup_{[0,1]} |f-g|$$

Soit $E := \{f \in C[0,1] \mid f(0) = 1\}$.



(a) MQ E est fermé par rapport à d_∞.

Montrons que $E^c = \{f \in C[0,1] \mid f(0) \neq 1\}$ est ouvert dans $(C[0,1], d_\infty)$.

Soit $f \in E^c$. Posons $r = |f(0) - 1|$ et considérons $g \in B(f,r)$. Alors $d_\infty(f,g) < r$. En particulier,

$$|f(0) - g(0)| \leqslant \sup_{[0,1]} |f-g| = d_\infty(f,g) < r,$$

d'où

$$\begin{aligned}
|1 - g(0)| &= |1 - f(0) + f(0) - g(0)| \\
&= |1 - f(0) - (g(0) - f(0))| \\
&\geqslant \underbrace{|1 - f(0)|}_{> r} - \underbrace{|g(0) - f(0)|}_{< r} \\
&> r - r \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $g(0) \neq 1$. Donc $g \in E^c$.

$\Rightarrow B(f,r) \subseteq E^c$

$\Rightarrow E^c$ est ouvert

$\Rightarrow E$ est fermé dans $(C[0,1], d_\infty)$.

$\square$

(b) MQ E n'est pas fermé par rapport à d_1.

Rappel : LESSE :

a) E est fermé

b) $E' \subseteq E$

c) $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$, $\forall x \in X$, $x_n \to x \Rightarrow x \in E$.

Donc il suffit de trouver une suite $(f_n) \subseteq E$ t.q. $f_n \to f$ dans $(C[0,1], d_1)$ et t.q. $f \notin E$.

Une telle suite a déjà été montrée en classe: considérons $f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \max\{1-nx, 0\}$.

Alors $f_n \in C[0,1]$ et $f_n(0) = \max\{1,0\} = 1$, donc $f_n \in E$ $\forall n$. Or $f_n \xrightarrow{d_1} 0$:

$$\begin{aligned} d_1(f_n, 0) &= \int_0^1 |\max\{1-nx, 0\} - 0|\, dx \\ &= \int_0^{1/n} |1-nx|\, dx \\ &= \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Or $0 \notin E$. On conclut que E n'est pas fermé dans $(C[0,1], d_1)$.

□