CHARLES SENÉCAL
charles.senecal@umontreal.ca
Bureau : AA-5247

Dispo : ?
Lu $\boxed{12h30 - 14h30}$
13h30 – 15h30
15h30 – 17h30
Me 13h30 – 15h30

EXERCICES DE LA SÉRIE #1.

#1 Déterminez si les fonctions suivantes sont des métriques sur $\mathbb{R}^{\cancel{2}}$:

(a) $d(x,y) = (x-y)^2 \in [0,\infty)$

Soient $x,y,z \in \mathbb{R}$.

(1) On a $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 0$

$$\Leftrightarrow x-y=0 \Leftrightarrow x=y$$

(2) $d(x,y) = (x-y)^2 = (y-x)^2 = d(y,x)$

(3) $d(x,z) = (x-z)^2 = (x-y+y-z)^2$

$$= (x-y)^2 + 2(x-y)(y-z) + (y-z)^2$$

$$\overset{?}{\leq} d(x,y) + d(y,z) = (x-y)^2 + (y-z)^2$$

$d(2,0) = 2^2 = 4$

$d(2,1) + d(1,0) = 1^2 + 1^2 = 2 \ngeq 4.$

Ce n'est pas une métrique.

(b) $d(x,y) = |x-2y|$

(1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x-2y=0 \Leftrightarrow x=2y$ ✗

Ce n'est pas une métrique sur $\mathbb{R}$.

(c) $d(x,y) = \begin{cases} |\log|x-y|| & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$

(1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$ ou $(x \neq y$ et $\log|x-y| = 0)$

$\Uparrow$

$$|x-y| = 1$$

$$d(1,0) = |\log|1-0|| = \log 1 = 0 \quad \times$$

Ce n'est pas une métrique sur $\mathbb{R}$.

(d) $d(x,y) = |x-y|^r$, où $r \in (0,\infty)$

(1) $|x-y|^r = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$ ✓

(2) $d(x,y) = |x-y|^r = |y-x|^r = d(y,x)$ ✓

(3) $d(x,z) = |x-z|^r$

$$= |x-y+y-z|^r$$

$$\leqslant (|x-y| + |y-z|)^r \quad \text{par } \Delta \text{ pour } |\cdot| \text{ et monotonicité croissante de } x \mapsto x^r$$

$$\overset{?}{\leqslant} |x-y|^r + |y-z|^r$$

Certainement pas vrai en général.

- pas pour $r > 1$:

  Supposons que $|x-z|^r \leqslant |x-y|^r + |y-z|^r$.

  Donc $|2-0|^r = |2-1+1-0|^r$

  $$\leqslant |2-1|^r + |1-0|^r = 1^r + 1^r = 2,$$

  d'où $2^r \leqslant 2$. Mais $r > 1 \Rightarrow 2^r > 2$ ↯

- oui pour $0 < r \leqslant 1$.

  On peut montrer que $|a+b|^r \leqslant |a|^r + |b|^r \; \forall r \in (0,1)$

#2 Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que $\forall x, y, z \in X$ on a $|d(x,y) - d(y,z)| \leqslant d(x,z)$.

Soient $x, y, z \in X$.

Par l'inégalité du triangle, on a

- $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) = d(x,z) + d(y,z)$

  $\Rightarrow d(x,y) - d(y,z) \leqslant d(x,z)$ ①

- $d(y,z) \leqslant d(y,x) + d(x,z) = d(x,y) + d(x,z)$

  $\Rightarrow d(y,z) - d(x,y) \leqslant d(x,z)$ ②

Par ① & ②, on a

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leqslant d(x,z)$$

#3 (a) Soit (Y, d_Y) un espace métrique et $f: X \to Y$ une fonction. MQ $d_X(x,y) := d_Y(f(x), f(y))$ est une métrique sur X ssi f est injective.

Soient $x, y, z \in X$.

(2) $d_X(x,y) = d_Y(f(x), f(y)) = d_Y(f(y), f(x)) = d_X(y,x)$ ✓

(3) $d_X(x,z) = d_Y(f(x), f(z))$

$$\leq d_Y(f(x), f(y)) + d_Y(f(y), f(z))$$

$$= d_X(x,y) + d_X(y,z) \quad ✓$$

(1) $d_X(x,y) = 0 \Leftrightarrow d_Y(f(x), f(y)) = 0$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

Si f est injective, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Donc si f est injective, d_X est une métrique.

Si d_X est une métrique, alors $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ d'où f est injective.

$\square$

(b) Déterminer si les fonctions $d: X \times X \to [0, \infty)$ suivantes sont des métriques.

(i) $X := \mathbb{R}$, $d(x,y) := |x^2 - y^2|$

On sait que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est un espace métrique.

Considérons la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$.

Alors, $d(x,y)$ est de la forme $d_Y(f(x), f(y))$ avec $Y = \mathbb{R}$, $d_Y = |\cdot|$. Comme f n'est pas injective, d n'est pas une métrique (p.ex. $d(1,-1) = 0$)

(ii) $X := (0, \infty)$, $d(x,y) := \min\{1, \max\{\log(\frac{x}{y}), \log(\frac{y}{x})\}\}$

On peut réécrire cette expression différemment.

On a $\log(\frac{x}{y}) = \log(x) - \log(y)$ ←

$\log(\frac{y}{x}) = \log(y) - \log(x)$ ←

Alors $\max\{\log(\frac{x}{y}), \log(\frac{y}{x})\} = |\log(x) - \log(y)|$,

d'où $d(x,y) = \min\{1, |\log(x) - \log(y)|\}$.

$= \min\{1, |f(x) - f(y)|\}$

$= d_Y(f(x), f(y))$

où $f : (0,\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \log(x)$

$Y = \mathbb{R}$, $d_Y(x,y) := \min\{1, |x-y|\} \in [0,\infty)$

exercice (plus généralement : si (Y,d) est un espace métrique, alors $d^*(x,y) := \min\{1, d(x,y)\}$ est une métrique sur Y)

Comme $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ est injective, on conclut que d est une métrique sur $(0,\infty)$.

(iii) $X := \mathbb{R}^2$, $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := |x_1 - y_1 + x_2 - y_2|$

Encore une fois de la forme $d_Y(f(x_1,y_1), f(x_2,y_2))$

où $Y = \mathbb{R}$, $d_Y = |\cdot|$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x - y$.
f n'est pas injective, donc d n'est pas une métrique sur $\mathbb{R}^2$

($f(x,x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$d((x,x),(0,0)) = 0$ même si $(x,x) \neq (0,0)$)

* En fait, ce n'est pas tout à fait de cette forme.
Il faudrait plutôt $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_1 - y_1 - (x_2 - y_2)|$.

$$= |x_1 - y_1 - x_2 + y_2|$$

Le contrexemple donné reste valide et ce n'est tout de même pas une métrique sur $\mathbb{R}^2$.

#4 Soit $(x_1, \dots, x_k)^t \in \mathbb{R}^k$. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} d_n(x,0) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{j=1}^{k} |x_j|^n}$$

si cette limite existe. Correspond-elle à la définition de d_∞ donnée en classe ?

(i.e. $d_\infty(x,0) = \max_{1\leq j\leq k} \{|x_j|\}$)

Essayons de calculer

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{j=1}^{k} |x_j|^n}$ en sandwichant l'expression.

Posons $m = d_\infty(x,0) = \max_{1\leq j\leq k} \{|x_j|\}$. On a

$$m^n \leq \sum_{j=1}^{k} |x_j|^n \leq \sum_{j=1}^{k} m^n = k \cdot m^n,$$

car tous les $|x_j|^n$ sont ≥ 0 — car m est le maximum

d'où $m = \sqrt[n]{m^n} \leq \sqrt[n]{\sum_{j=1}^{k} |x_j|^n} \leq \sqrt[n]{k m^n} = \sqrt[n]{k} \cdot m$

car la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est monotone croissante sur $[0,\infty)$.

On a donc

$$m \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{j=1}^{k} |x_j|^n} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{k} \cdot m = 1\cdot m = m,$$

d'où $\lim_{n\to\infty} d_n(x,0) = m = d_\infty(x,0)$.

#5 Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une **norme** sur X est une fonction $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ t.q. $\forall x,y \in X$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$
3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

On dit que $(X, \|\cdot\|)$ forme un **espace vectoriel normé**.

(a) (Métrique induite). Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace normé. MQ la fonction $d : X \times X \to [0,\infty) : (x,y) \mapsto \|x-y\|$ définit une métrique sur X. Cette métrique est **induite** par la norme.

(1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$

par (1) de la déf. de $\|\cdot\|$

(2) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\|$

$\overset{(2)}{=} |-1| \cdot \|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$

(3) $d(x,z) = \|x-z\|$

$= \|x-y+y-z\|$

$\leqslant \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$ ✓

HIÉRARCHIE DES ESPACES

Espace préhilbertien $\subset$ Espace normé $\subset$ Espace métrique $\subset$ Espace topologique

$\langle\cdot,\cdot\rangle \xrightarrow[\sqrt{\langle x,x\rangle}]{\text{induit}} \|\cdot\| \xrightarrow[\|x-y\|]{\text{induit}} d(\cdot,\cdot) \xrightarrow[\text{boules ouvertes}]{\text{induit}} \mathcal{T}$

(b) MQ $d(x,y) = |e^x - e^y|$ est une métrique sur $\mathbb{R}$ et montrer que d n'est induite par aucune norme.

Par un exercice précédent, avec $Y = \mathbb{R}$, $d_Y = |\cdot|$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x$, qui est injective, d est bien une métrique.

Par contre, si on avait $d(x,y) = \|x-y\|$ pour une certaine norme $\|\cdot\|$, on aurait, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}|e^{\alpha x} - e^{\alpha y}| = \|\alpha x - \alpha y\| &= |\alpha| \cdot \|x-y\| \\ &= |\alpha| \cdot |e^x - e^y| \\ &= |\alpha e^x - \alpha e^y|,\end{aligned}$$

ce qui est faux en général.

(c) (Norme induite). Soit X un espace vectoriel et d une métrique sur X. MQ qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur X t.q. $d(x,y) = \|x-y\|$ ssi $\forall x, y, z \in X$ et $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y) \quad \text{et} \quad d(x+z, y+z) = d(x,y)$$

Montrer que dans ce cas, $\|x\| = d(x,0)$.

($\Rightarrow$) Supposons que $d(x,y) = \|x-y\|$. Alors

- $d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha| \cdot \|x-y\| = |\alpha| \cdot d(x,y)$
- $d(x+z, y+z) = \|x+\cancel{z} - (y+\cancel{z})\| = \|x-y\| = d(x,y)$
- $d(x,0) = \|x-0\| = \|x\|$.

($\Leftarrow$) Supposons que $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$ et $d(x+z, y+z) = d(x,y)$. Posons $\|x\| := d(x,0)$.

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow d(x,0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ✓

(2) $\|\alpha x\| = d(\alpha x, 0) = d(\alpha \cdot x, \alpha \cdot 0)$

$$= |\alpha| \cdot d(x, 0) = |\alpha| \cdot \|x\| \checkmark$$

(3) $\|x+y\| = d(x+y, 0)$

$$= d(x+y+(-y), -y)$$

$$= d(x, -y)$$

$$\leq d(x,0) + d(0,-y)$$

$$= \|x\| + d(y, 0) = \|x\| + \|y\| \checkmark$$

$\square$

#6 Soit V un espace vectoriel. Un ensemble $E \subseteq V$ est dit **convexe** si $\forall x, y \in E$, on a $D_{x,y} := \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\} \subseteq E$.
Ici, $D_{x,y}$ est le segment de droite entre x et y dans l'espace.

(a) Soit d une métrique sur V. Montrer que si d est induite par une norme, alors $\forall a \in V$ et $r > 0$, $B(a,r)$ est convexe.

Soient $x, y \in B(a,r)$. Soit $t \in [0,1]$. On veut MQ $(1-t)x + ty \in B(a,r)$. On a

$$\begin{aligned} d((1-t)x + ty, a) &= d((1-t)x, a - ty) \\ &= d((1-t)x, (1-t)a + ta - ty) \\ &\leq d((1-t)x, (1-t)a) \\ &\quad + d((1-t)a, (1-t)a + ta - ty) \\ &= |1-t| \cdot d(x,a) \\ &\quad + d(ty, ta) \\ &= (1-t) \cdot \underbrace{d(x,a)}_{<r} + |t| \cdot \underbrace{d(y,a)}_{<r} \\ &< (1-t) \cdot r + t \cdot r \\ &= r \; \checkmark \end{aligned}$$

Donc $(1-t)x + ty \in B(a,r)$. Alors $D_{x,y} \subseteq B(a,r)$.
Alors $B(a,r)$ est convexe. $\square$

(b) Trouver une métrique d sur $\mathbb{R}^2$ pour laquelle $B((1,0),2)$ n'est pas convexe.

On peut prendre $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,\infty)$

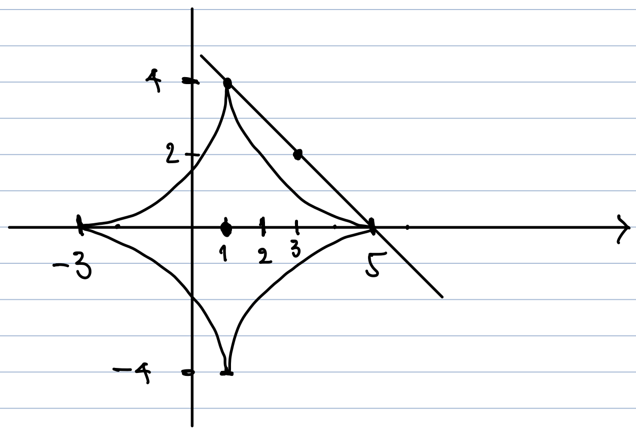
$$((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \longmapsto |x_1 - x_2|^p + |y_1 - y_2|^p$$

où $0 < p < 1$.

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{|x_1 - x_2|} + \sqrt{|y_1 - y_2|}$

$(x, 0)$ $\quad d((x,0),(1,0)) = \sqrt{|x-1|} + \sqrt{0}$

$< 2 \iff |x-1| < 4$



$\rightarrow d((3,2),(1,0)) = \sqrt{2} + \sqrt{2}$

$\approx 2{,}8 > 2$

$d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0, \infty)$ $\quad d(x,y) = \begin{cases} \|x - y\| & \text{si } x \text{ et } y \text{ sont lin. dép.} \\ \|x\| + \|y\| & \text{sinon} \end{cases}$

« métrique SNCF »