§6.6 Fonctions de classe C^k

Rappel Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. On pose

$$C(U,\mathbb{R}^m) := C^0(U,\mathbb{R}^m) = \{f : U \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ est continue}\}.$$

Si on voulait munir $C(U,\mathbb{R}^m)$ d'une norme, p.ex. $\|\cdot\|_\infty$, alors on ajoutera «bornée» à la définition, mais ce n'est pas nécessaire pour cette section.

Déf. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ouvert. On dit que $f : U \to \mathbb{R}^m$ est de classe C^1 si $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe et est de classe C^0 pour tout i,j. On définit

$$C^1(U,\mathbb{R}^m) = \{f : U \to \mathbb{R}^m \mid f \text{ est de classe } C^1\}.$$

Théorème (de convergence)

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $C^1(U,\mathbb{R}^m)$. On suppose que $f_n \to f$ simplement sur U et on suppose que pour chaque j, $\frac{\partial f_n}{\partial x_j}$ converge uniformément sur U.

Alors $f \in C^1(U,\mathbb{R}^m)$ et $\frac{\partial f_n}{\partial x_j} \to \frac{\partial f}{\partial x_j}$ pour chaque j.

Dém.

On peut supposer que $m=1$, quitte à répéter l'argument pour chaque composante de f.

On pose $g_j := \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f_n}{\partial x_j}$ pour chaque j. Alors $g_j \in C^0(U)$

pour chaque j, car la convergence est uniforme. On fixe $a \in U$ et $j \in \{1,\dots,d\}$. Pour chaque $h \in \mathbb{R}$ assez petit, le segment $[a, a+he_j] \subseteq U$, car U est ouvert. Ensuite, on a sur $[a,a+he_j]$

$$\left| f_n(a+he_j) - f_n(a) - \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a)h \right| \leq$$

$$\leq |h| \sum_{j=1}^{d} \sup_{x \in [a, a+he_j]} \left| \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right|$$

(Exercice série 6. Découle du thm de la moyenne.)

On laisse $n \to \infty$:

à cause de la convergence unif.

$$|f(a+he_j) - f(a) - g_j(a)h| \leq |h| \sum_{j=1}^{d} \sup_{[a, a+he_j]} |g_j(x) - g_j(a)|$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f(a+he_j) - f(a)}{h} - g_j(a) \right| \leq \sum_{j=1}^{d} \sup_{[a, a+he_j]} |g_j(x) - g_j(a)|$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } h \to 0.$$

Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ existe et vaut $g_j(a)$. D'où $f \in C^1(U)$ et $\frac{\partial f_n}{\partial x_j} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}$. $\square$

Déf (Multi-indice) Un <u>multi-indice</u> pour $\mathbb{R}^d$ est un vecteur $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ tel que $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Pour un tel α, on définit

$|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$

$\alpha! := \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d!$

$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_d^{\alpha_d}$, où $x \in \mathbb{R}^d$

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} f \quad \text{où } f \in C^{|\alpha|}(U, \mathbb{R}^m).$$

<u>Ex.</u> Si $\alpha = (1, 0, 3)$, alors

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}^\alpha = 2^1 \times (-1)^0 \times 4^3 = 2 \times 64 = 128 \qquad |\alpha| = 1 + 0 + 3 = 4$$

$$\alpha! = 1!\,0!\,3! = 6$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2 x_3^4$$

$$\partial^\alpha f = \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \, \partial x_3^3} f = 3 x_1^2 x_2 \, 24 x_3.$$

Déf Soit $U \subseteq \mathbb{R}^d$. On dit que f est de <u>classe C^k</u> si pour tout multi-indice α tel que $|\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha f$ existe et est continue.
On pose $C^k(U, \mathbb{R}^m) = \{ f : U \to \mathbb{R}^m \mid \partial^\alpha f \text{ existe } \in C^0(U, \mathbb{R}^m) \ \forall |\alpha| \leq k \}$.

$= \{ f : U \to \mathbb{R}^m \,/\, f$ est de classe $C^k \}$.

Enfin, on dit que f est de classe C^∞ si f est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. On pose

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k \geq 1} C^k(U, \mathbb{R}^m).$$

Ex. • Tout polynôme est de classe C^∞.

- Si p et q sont deux polynômes à d variables, alors $f(x_1, \dots, x_d) := \dfrac{p(x_1, \dots, x_d)}{q(x_1, \dots, x_d)}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{x \mid q(x) = 0\}$. (Note : Comme $\{x \mid q(x) = 0\}$ est fermé $\mathbb{R}^d \setminus \{x \mid q(x) = 0\}$ est ouvert.)

- Si $d = 1$, alors une fonction est de classe C^∞ si et seulement si elle est infiniment dérivable. Ainsi, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\log x$, $\tan x$, etc. sont de classe C^∞ sur leur domaine.

Théorème (de convergence C^k)
Soit $k \geq 1$. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un ouvert et soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de $C^k(U, \mathbb{R}^m)$. On suppose que $f_n \to f$ simplement sur U et que $(\partial^\alpha f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur U pour chaque multi-indice α avec $|\alpha| \leq k$. Alors $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$ et $\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f$ pour chaque α avec $|\alpha| \leq k$.

Dém.
On suppose que $m = 1$, quitte à appliquer l'argument à chaque composante de f.
Par récurrence sur k :
le cas $k = 1$ est le théorème précédent.
on suppose le résultat vrai pour $k-1$:
On fixe un multi-indice β tel que $|\beta| = k-1$.
Alors, pour chaque j, $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \partial^\beta f_n\right)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur U par hypothèse.

Donc par le théorème précédent appliqué à la suite $(\partial^\beta f_n)_{n\geq 1}$, on déduit que $\partial^\beta f \in C^1(U)$ et $\frac{\partial}{\partial x_j}\partial^\beta f_n \to \frac{\partial}{\partial x_j}\partial^\beta f$.
Il suit que $f \in C^k(U)$ et que $\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f$, complétant la récurrence. $\square$

Corollaire Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions dans $C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$. Si $f_n \to f$ simplement sur U et si $(\partial^\alpha f_n)_{\geq 1}$ converge uniformément sur U pour tout multi-indice α, alors $f \in C^\infty(U, \mathbb{R}^m)$ et $\partial^\alpha f_n \to \partial^\alpha f$ pour tout α.

Théorème (de Taylor)
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f: U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^k et soit $a \in U$. Alors

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{\substack{\alpha \\ |\alpha| \leq k \\ |\alpha| \neq 0}} \frac{\partial^\alpha f}{\alpha!} h^\alpha + o(\|h\|^k)$$

$g(h) = o(|h|^k) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{g(h)}{|h|^k} = 0$

Dém.
On pose $g(h) := f(a+h) - \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} h^\alpha$.

Alors g est de classe C^k (en h) sur une boule centré en $\vec{0}$ et $\partial^\alpha g(0) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par la continuité de $\partial^\alpha g$ en 0, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow |\partial^\alpha g(h)| < \frac{\varepsilon}{n^k}, \quad \forall |\alpha| = k.$$

On prend β tel que $|\beta| = k-1$ et $h \in \mathbb{R}^n$ avec $\|h\| < \delta$. Par le théorème de la moyenne appliqué à $\partial^\beta g$ sur $[0, h]$, on a

$$|\partial^\beta g(h) - \partial^\beta g(0)| \leq \|h\| \sum_{j=1}^{n} \overbrace{\sup_{[0,h]} \left|\frac{\partial}{\partial x_j} \partial^\alpha g\right|}^{\leq \frac{\varepsilon}{n^k}}$$

$$\leq \|h\| \frac{\varepsilon}{n^{k-1}}.$$

On a donc $\|h\| < \delta \Rightarrow |\partial^\beta g(h)| \leq \dfrac{\|h\| \varepsilon}{n^{k-1}}$ $\quad \forall |\beta| = k-1$.

En répétant cet argument, on obtient

$$\|h\| < \delta \Rightarrow |\partial^\gamma g(h)| \leq \frac{\|h\|^\ell \varepsilon}{d^{k-\ell}} \qquad \forall |\gamma| = k - \ell.$$

En particulier, on a
$\|h\| < \delta \Rightarrow |g(h)| \leq \varepsilon \|h\|^\ell$
Il suit que $g(h) = o(\|h\|^\ell)$ lorsque $h \to 0$. $\square$

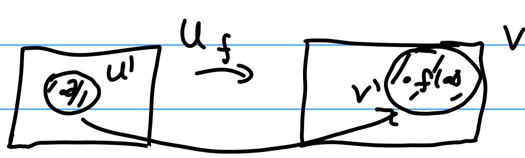
Chapitre 7 Fonctions implicites

§7.1. Théorème d'inversion local

Def Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^m$ des ouverts et soit $f: U \to V$ une fonction.

1) f est un <u>C^1-difféomorphisme</u> si f est une bijection telle que f et f^{-1} sont de classe C^1 sur U et sur V respectivement.

2) f est un <u>C^1-difféomorphisme local</u> s'il existe des voisinages U' de a et V' de $f(a)$ tels que $f: U' \to V'$ est un C^1-difféomorphisme.



Remarques

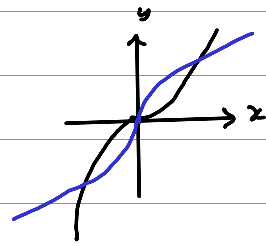
① $f \in C^1(U) \Leftrightarrow J_f$ existe et est continue sur U.

$\Leftrightarrow$ chaque $x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ existe et est continue sur U. (Exercice)

② $f \in C^1(U)$ et un homéomorphisme $\not\Rightarrow$ f un difféomorphisme.

Ex. $f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$

$f \in C^1(\mathbb{R})$, $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ sur $\mathbb{R}$ existe et est continue mais $(f^{-1})'(0)$ n'existe pas.



Remarque
Dans $\mathbb{C}$, f ne serait pas bijective

Théorème Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^m$ des ouverts. Si $f : U \to V$ est un difféomorphisme, alors $n = m$ et pour tout $a \in U$, on a $f'(a) \in M_n^{-1}$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = f'(a)^{-1}.$$

Dém.

On pose $g := f^{-1}$. Soit $a \in U$, on pose $b := f(a)$, $A = f'(a) \in M_{m \times n}$ et $B = g'(b) \in M_{n \times m}$. La règle de dérivation en chaîne montre que

$$g \circ f(x) = x \quad \forall x \in U \Rightarrow BA = (g \circ f)'(a) = I_n.$$

De même, on a

$$f \circ g(y) = y \quad \forall y \in V \Rightarrow AB = (f \circ g)'(b) = I_m.$$

Si $n > m$, alors $\{Ae_j\}_{j=1}^{n} \subseteq \mathbb{R}^m \Rightarrow \exists\, k_j \ (j = 1, \dots, n)$

Samedi:
10h30 à 12h30.

non tous nul tels que $k_1 Ae_1 + \cdots + k_n Ae_n = 0$
(les Ae_j sont linéairement dependants).

$$\Rightarrow k_1 \underbrace{BA}_{I_n} e_1 + \cdots + k_n BAe_n = 0$$

$$\Rightarrow k_1 e_1 + \cdots + k_n e_n = 0 \quad ※.$$

car les e_j forment une base de $\mathbb{R}^n$.
De même, si $m>n$, on obtient une contradiction en considérant $\{Be_j\}_{j=1}^{m} \subseteq \mathbb{R}^n$.
Ainsi, $n=m$ et $AB = BA = I_n$ et donc $B = A^{-1}$, c'est-à-dire

$$(f^{-1})'(f(a)) = f'(a)^{-1} \in M_n^{-1}. \quad \square$$