

Analyse 1

Série 5

Dérivée

1. Définition

Exercice 1. Calculer $f'(0)$, où $f(x) := x|x|$. Est-ce que $f''(0)$ existe ?

Exercice 2. Soit f une fonction dérivable et $c \in \mathbb{R}$ une constante.

- a) Montrer à l'aide de la définition que si $g(x) = f(x) + c$, alors $g'(x) = f'(x)$. Expliquer ce que cela veut dire géométriquement.
- b) Montrer à l'aide de la définition que si $h(x) = f(cx)$, alors $h'(x) = cf'(cx)$.

Exercice 3. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in I$. Montrer que s'il existe une fonction ε et un nombre $L \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + Lh + \varepsilon(h)h,$$

où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$.

Exercice 4. Soit $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$, alors a-t-on que $f'(x) \leq g'(x)$ pour tout $x \in I$?

Exercice 5. Soit I un intervalle ouvert et $a \in I$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On pose

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}.$$

- a) Montrer que si f est dérivable en a , alors la limite L existe et $f'(a) = L$.
- b) Réciproquement, si la limite L existe, alors f est-elle dérivable en a ?

Exercice 6. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. On suppose que $f(a) = 0$. On définit $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-a}, & \text{si } x \neq a, \\ L, & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Montrer que g est continue en a si et seulement si $[f$ est dérivable en a et $f'(a) = L]$.

Exercice 7. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer que $f'(0)$ existe.

Exercice 8. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $a \in I$ un point. Soit $f, g, h: I \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions telles que $f(a) = g(a) = h(a)$ et $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in I$. Montrer que si f et h sont dérivables en a et que $f'(a) = h'(a)$, alors g est dérivable en a et $g'(a) = f'(a) = h'(a)$.

2. Règles de calcul

Exercice 9. Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \cos(x + \log x)$ b) $f(x) = x \sin(x^2) - \log\left(\frac{x}{x-1}\right)$
c) $f(x) = x^x$ d) $f(x) = e^{x^2 \tan x}$

Exercice 10. Soit $f(x) = x^3$.

- Calculer $f'(x)$.
- Calculer $f'(x^2)$.
- On pose $g(x) = f(x^2)$. Calculer $g'(x)$. A-t-on $g'(x) = f'(x^2)$?

Exercice 11. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Calculer la dérivée de f en fonction de g et de g' .

a) $f(x) = g(x + g(a))$ b) $f(x) = \left(xg(x + a)\right)^2$
c) $f(x) = g(xg(x))$ d) $f(x) = g(x)g(x^2 + g(x))$

Exercice 12. Soit $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

- Montrer que f est continue en 0.
- Montrer que f est dérivable en 0.
- Montrer que f' est continue en 0.

Exercice 13. a) Démontrer la formule de Leibniz :

$$\frac{d^n}{dx^n}(u \cdot v) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(n-k)} \cdot v^{(k)},$$

où u et v sont des fonctions n -fois dérivable. Ici, $u \cdot v$ représente le produit de u et de v .

b) Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Indice. Appliquez la formule du a) aux fonctions $u(x) = v(x) = x^n$.

Exercice 14. En utilisant l'identité

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

trouver une formule pour exprimer

$$\sum_{k=0}^n kx^{k-1}.$$

3. Extrémums

Exercice 15. Calculer le maximum et le minimum des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^2 - x$ sur $[0, 1]$

b) $f(x) = (x - 2)\sqrt[3]{x^2}$ sur $[-3, 3]$

c) $f(x) = xe^x$ sur $[-2, 1]$

d) $f(x) = \begin{cases} x \log x, & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 16. Déterminer si $5\sqrt[6]{6}$ est plus grand ou plus petit que $6\sqrt[5]{5}$.

Suggestion. Comparez $f(5)$ et $f(6)$, où $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$.

Exercice 17. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On pose $g(x) := f \circ f(x)$. Quels sont les points critiques de g ?

Rappel. On dit que x est un point critique de g si $g'(x) = 0$.

Exercice 18. Soit $a < c < b$. Soit $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $f(c) = g(c)$ et $f'(x) > g'(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

a) Montrer que $f(x) > g(x)$ pour tout $x \in (c, b]$.

b) Montrer que $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in [a, c)$.

4. Théorème de Rolle et des accroissements finis

Exercice 19. Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

- a) Montrer que f est croissante sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- b) Montrer que si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I .

Exercice 20. Soit $f(x) = 1 - (1 - x)^{\frac{2}{3}}$, pour $x \in [0, 2]$. Existe-t-il un $y \in (0, 2)$ tel que $f'(y) = 0$? Cela contredit-il le théorème de Rolle?

Exercice 21. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $f'(x) \geq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Montrer que $f(b) \geq f(a) + M(b - a)$.

Remarque. On sait déjà que $f(b) \geq f(a)$, car l'hypothèse implique que f est croissante. Ainsi, cet exercice donne une inégalité un peu plus fine.

Exercice 22. Montrer les inégalités suivantes.

- a) $\sin x \leq x \quad (x \geq 0)$
- b) $1 + x \leq e^x \quad (x \in \mathbb{R})$
- c) $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x \quad (x > -1)$

Exercice 23. Trouver le nombre exact de zéro du polynôme $p(x) = x^4 - 8x^3 - 21x^2 + 22x - 2$.
Indice. Tous les zéros se trouvent dans $(-3, 11)$.

Exercice 24. Soit $a < c < b$. Soit $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f'(x)$ existe en tout point $x \neq c$. Montrer que si $\lim_{x \rightarrow c} f'(x)$ existe, alors f est dérivable en c .

Exercice 25. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f' est continue, alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, on a $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

Exercice 26. Montrer que les fonctions suivantes sont convexes.

- a) $f(x) = xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$
- b) $f(x) = |x|$
- c) $f(x) = \log\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, \infty)$

Exercice 27. a) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $c \in (a, b)$. Montrer que si f est convexe sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, alors f est convexe sur $[a, b]$.

- b) Montrer que le a) est faux si on ne suppose pas que f est dérivable.

Exercice 28. Soit la suite (a_n) définie par $a_1 = -\frac{1}{8}$ et $a_{n+1} = a_n^3 + a_n^2$ pour $n \geq 1$. Soit $f(x) = x^3 + x^2$.

- a) Montrer que $|a_n| \leq \frac{1}{4}$.
- b) Montrer que $|f'(x)| \leq \frac{11}{16}$ pour tout $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$.
- c) À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que (a_n) est Cauchy.

Exercice 29[†]. Soit $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. On suppose de plus que f' est continue en x_0 .

- a) Montrer que si $|f'(x_0)| < 1$, alors il existe $k > 0$ et $\delta > 0$ tels que pour tout $x \in [a, b]$, si $|x - x_0| < \delta$, alors $|f'(x)| \leq k < 1$.
- b) Montrer que si $|x - x_0| < \delta$, alors $|f(x) - x_0| < \delta$.
- c) Soit $c \in [a, b]$. On définit la suite (a_n) par $a_1 = c$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ pour $n \geq 1$. Montrer que si $|c - x_0| < \delta$, alors (a_n) est une suite de Cauchy.
- d) Montrer que (a_n) converge vers x_0 .

5. Règle de l'Hôpital

Exercice 30. Calculer les limites suivantes.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin(5x)}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin x}{\sin(5x)} - \frac{1}{5}\right)}{x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1}, (a, b > 0)$
- e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\arctan(x + 1) - \arctan x)$
- f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Exercice 31. On calcule une limite de la façon suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \stackrel{\text{R.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1} = 0.$$

Quelle est l'erreur ? Calculer la limite de la bonne façon.

Exercice 32. On calcule une limite de la façon suivante :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) \stackrel{\text{R.H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) = 0.$$

Quelle est l'erreur ? Calculer la limite de la bonne façon.

Exercice 33. On calcule une limite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin x} &= \frac{e^0 - 1}{\sin 0} = \frac{0}{0} && \text{(forme indéterminée)} \\ &\stackrel{\text{R.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}}{\cos x} \\ &= \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Quelle est l'erreur ? Calculer la limite de la bonne façon.

Exercice 34. Tenter de résoudre la limite en utilisant la règle de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 3}}{x + 3}.$$

Quelle est le problème ? Résoudre par une autre méthode.

Exercice 35[†]. Calculer la limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \frac{x^{\frac{1}{x}} - 1}{\log x}.$$

6. Développements limités et Théorème de Taylor

Exercice 36. Soit $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. On pose

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ f'(0), & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Calculer $g'(0)$.

Exercice 37. Soit f une fonction trois fois dérivable en 0 telle que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x - x} = 1.$$

Déterminer son développement limité jusqu'à l'ordre trois.

Exercice 38. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. On suppose que f est n -fois dérivable en a . Montrer que s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction ε telle que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + \dots + a_n(x - a)^n + \varepsilon(x - a)(x - a)^n,$$

où $\varepsilon(x - a) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow a$, alors $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. (Autrement dit, le développement limité est unique.)

Exercice 39. Utiliser le numéro précédent pour calculer le développement limité des fonctions suivantes, sans calculer de dérivée.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en $x = 0$ à l'ordre 5

b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $x = 1$ à l'ordre 4

Exercice 40. Soit I un intervalle et $a \in I$. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(a) = 0$, $f'(a) = 0, \dots, f^{(n-1)}(a) = 0$ et $f^{(n)}(a)$ existe. Montrer qu'il existe une fonction g continue en a telle que $f(x) = (x - a)^n g(x)$.

Exercice 41. Montrer que pour $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, on a $\tan x > x + \frac{x^3}{3}$.

Exercice 42. Montrer les inégalités suivantes en utilisant le théorème de Taylor.

a) $|\sin x - x| \leq \frac{x^2}{2} \quad (x \in \mathbb{R})$ b) $|\log(1+x) - x| \leq \frac{x^2}{2} \quad (x \geq 0)$

Exercice 43[†]. a) Montrer que le développement de Taylor de $\log(1+x)$ en $x=0$ est

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{(1+\xi)^n n},$$

où $\xi \in (-x, x)$.

b) Montrer que si $x \in [0, 1]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} + \cdots - \frac{x^{2n}}{2n} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.$$

c) Dédurre que $\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Attention! Il est vrai qu'on a $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ pour tout $x \in (-1, 1)$, mais ce n'est pas une conséquence du théorème de Taylor. En général, le théorème de Taylor ne permet pas de faire un développement « jusqu'à l'infini ». Comparer avec l'exercice 44 et l'exercice 45.

Exercice 44[†]. On pose $f(x) := e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(x) := 0$ si $x \leq 0$.

- a) Montrer que f est dérivable et calculer $f'(0)$.
- b) Montrer qu'il existe deux polynômes P_n, Q_n tels que $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} e^{-\frac{1}{x}}$ pour $x > 0$.
- c) Montrer que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- d) Selon le théorème de Taylor, on a

$$f(x) = f(0) + \cdots + f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} + f^{(n+1)}(\xi) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

pour un certain $\xi \in (-x, x)$. Or, par le c), on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{x^n}{n!} = 0 \neq f(x) \quad \text{pour } x > 0.$$

Expliquer pourquoi cela ne contredit pas le théorème de Taylor.

Exercice 45. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction infiniment dérivable et $a \in I$. Soit $K \subseteq I$ un intervalle compact qui contient a . On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in K$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on ait

$$|f^{(n)}(x)| \leq C^{n+1} n!.$$

Montrer qu'alors, la série de Taylor de f en a converge vers f pour tout $x \in K$ avec $|x - a| < \frac{1}{C}$.

Remarque. La réciproque est vraie, mais elle est difficile à montrer avec les outils d'analyse 1.

7. Autres

Exercice 46. Tracer le graphe des fonctions suivantes.

a) $f(x) = (x - 1)e^x$

b) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$

c) $f(x) = \frac{x^2(x-2)}{x-1}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{|1-x^2|}}{x}$

Exercice 47. Calculer la série de Taylor en $x = 0$ des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$

b) $f(x) = \sqrt{1+x}$

c) $f(x) = e^{x^2}$

d) $f(x) = \log(1+x)$

e) $f(x) = \arctan x$

f) $f(x) = \sin(x^2)$

Exercice 48. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable non constante telle que $f(0) = 1$. Montrer que si $f'(x) = f(x)$ pour tout x , alors $f(x) = e^x$.

Indice. Le problème est équivalent à montrer que $\frac{f(x)}{e^x} = 1$.

Exercice 49. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'(0) = 1$. Montrer que si $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, alors $f(x) = e^x$.

Exercice 50. Vrai ou faux. Si l'énoncé est vrai, le montrer. S'il est faux, donner un contre-exemple.

a) Si $f + g$ est dérivable en a , alors f ou g est dérivable en a .

b) Si fg est dérivable en a , alors f ou g est dérivable en a .

c) Si f est continûment dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, alors il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

d)[†] Si f est dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, alors il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in [a, b]$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

e) Si f'' possède au plus un zéro sur l'intervalle $[a, b]$, alors f possède au plus trois zéro sur l'intervalle $[a, b]$.

f) Soit f une fonction telle que $f(x) \geq 0$. Si $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$ et $f''(a)$ existe, alors $\sqrt{f}$ est dérivable en a .