

Analyse 1

Série 4

Continuité

1. Limites de fonctions

Exercice 1. Calculer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2+7}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, où $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \geq 0, \\ \frac{x+1}{2x^2+x-1}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

h) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, où $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & \text{si } x \geq 1, \\ \sqrt{1-x}, & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Exercice 2. Montrer que la limite lorsque $x \rightarrow 1$ de $\left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$ tend vers -1 .

Exercice 3. Déterminer le domaine de la fonction $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{nx}$.

Exercice 4. Soit $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et soit $a \in \overline{D}$.

- a) Trouver un exemple pour lequel $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ existe, mais $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ n'existe pas.
- b) Si $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ et $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$ existent, peut-on conclure que $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existent ?

Exercice 5. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in D$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$.
- b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x+a)$.
- c) On suppose que $a = 0 \in D$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x^3)$.

Exercice 6. Calculer la limite de $\frac{\lfloor x \rfloor - x}{x}$ lorsque $x \rightarrow 0$, si elle existe.

Exercice 7. a) Calculer $\lim_{y \rightarrow 0^+} \sup_{x \in [0, y]} \lfloor x \rfloor$.

b) Calculer $\lim_{y \rightarrow 0^+} \inf_{x \in [0, y]} \lfloor x \rfloor$

c) Les limites calculées au a) et au b) sont-elles égales ?

Exercice 8. Soit $f, g: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ deux fonctions. Montrer que si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe,}$$

alors il existe $C \geq 0$ et $R > 0$ tels que pour tout $x \geq R$, on a $f(x) \leq Cg(x)$. (Dans ce cas, on dit parfois que $f(x)$ est un $O(g(x))$, qui se lit « $f(x)$ est un grand O de $g(x)$ ». C'est une notation que vous avez peut-être déjà vu, par exemple en informatique.)

Remarque. L'hypothèse que la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ existe lorsque $x \rightarrow \infty$ impose la condition tacite qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \geq M$, on a $g(x) \neq 0$, sans quoi, le quotient pourrait ne pas être défini et la limite n'aurait donc pas de sens.

2. Fonctions continues en un point

Exercice 9. a) Soit f une fonction qui est telle que $|f(x)| \leq |x|$ pour tout x . Montrer que f est continue en 0.

b) Soit g une fonction telle que $g(0) = 0$ et g est continue en 0. Montrer que si $|f(x)| \leq |g(x)|$, alors f est continue en 0.

Exercice 10. a) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Déterminer les points de continuité (et de discontinuité) de f .

b) Soit $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ h(x), & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que f soit continue.

Exercice 11. Soit $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in I$. Montrer que si f et g sont continues en a , alors $\min\{f, g\}$ est continue en a .

Exercice 12. a) Montrer que $f(x) = \max\{0, x\}^2$ est continue en 0.

b) La fonction possède-t-elle des points de discontinuité ?

Exercice 13. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit c et $h > 0$ tels que $c \in I$ et $c + h \in I$. Montrer que si f est continue en c , alors

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \sup_{[c, c+h]} f(x) = f(c).$$

Exercice 14. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Montrer que si f est continue en 0, alors f est continue en a pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 15. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Soit $a \in I$ un point et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en a . Montrer que si $f(a) \neq 0$, alors il existe $r > 0$ tel que $(a - r, a + r) \subseteq I$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a - r, a + r)$.

Exercice 16. Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$.

- Quel est le plus grand domaine de définition de f ? Montrer que f est continue sur ce domaine.
- Existe-t-il un prolongement continu en 1?

3. Fonctions continues sur un intervalle

Exercice 17. Soit $a < b < c$. Soit $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $h: [b, c] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On pose

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{si } x \in [a, b], \\ h(x), & \text{si } x \in (b, c]. \end{cases}$$

Sous quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on que f est continue?

Exercice 18. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

alors f possède au moins un zéro.

Exercice 19. Montrer que les fonctions suivantes ont au moins un zéro. Donner une approximation d'une des racines à au plus $\frac{1}{2}$.

- $f(x) = x^4 - 5x^3 + 2$
- $f(x) = \frac{1}{x} - 4x + x^2$, avec $x > 0$

Exercice 20. Soit $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$. Calculer $\sup_{(-1, 1)} f(x)$ et $\inf_{(-1, 1)} f(x)$. Est-ce que f atteint son maximum? Son minimum? Cela contredit-il le théorème vu en classe sur le maximum et le minimum de f ?

Exercice 21. Soit $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f possède un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un x tel que $f(x) = x$.

Indice. Utilisez le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 22. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit $E \subseteq D$ un sous-ensemble dense dans D . Montrer que si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$, alors $f = g$ sur D .

On dit que E est dense dans D si pour tout $x, y \in D$ avec $x < y$, il existe $e \in E$ tel que $x < e < y$.

Exercice 23. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $K \in (0, \infty)$ un nombre tel que pour tout $x, y \in D$, on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Montrer que f est uniformément continue.

Exercice 24. Soit $I = (a, b)$ un intervalle. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit c tel que $a < c < b$. Montrer que si f est uniformément continue sur $(a, c]$ et sur $[c, b)$, alors f est uniformément continue sur (a, b) .

Exercice 25. Soit $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Soit $x \in [a, b]$ et soit (x_n) une suite de (a, b) qui converge vers x .

- a) Montrer que $(f(x_n))$ est une suite de Cauchy.
- b) Montrer que f se prolonge continûment sur $[a, b]$.

Exercice 26. Montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $(0, 1]$.

Indice. Utilisez le numéro précédent.

4. Autre

Dans cette section seulement, on suppose que les fonctions exponentielle et logarithme et les fonctions trigonométriques sont définies et continues. On tient pour acquis leurs propriétés habituelles. (Par exemples, les identités trigonométriques, le fait que $\exp$ et $\log$ sont strictement croissantes, le fait que $|\sin x| \leq 1$, etc.) On ne peut pas dériver ni intégrer ces fonctions.

Exercice 27. Soit la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

Exercice 28. On considère l'énoncé suivant.

Soit $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et continue sur (a, b) . Alors f est uniformément continue.

- a) Cet énoncé est-il vrai ou faux? Sans tenter de la résoudre rigoureusement, essayez de vous convaincre d'un côté ou de l'autre.
- b)[†] Montrer que f , définie par $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1)$, n'est pas uniformément continue sur $(0, 1)$.
- c) Quelle est réponse du a)?

Exercice 29. Montrer que $f(x) = e^x + \log x$ possède au moins un zéro. Donner une approximation de la racine à au plus $\frac{1}{2}$. (Remarque : $\log$ est le logarithme naturel, c'est-à-dire $\log := \ln := \log_e$.)

Exercice 30. Déterminer si les fonctions suivantes sont uniformément continues.

- a) $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1)$
- b) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $(0, 1]$
- c) $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 31. Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée, où D est non vide. On pose $S = \sup_{x \in D} f(x)$. Montrer qu'il existe une suite (x_n) dans D telle que $f(x_n) \rightarrow S$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 32. Les énoncés suivants sont **faux**. Trouver un contre-exemple.

- a) Si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors elle est uniformément continue.
- b) Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante et continue, alors elle est inversible.
- c) Si $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ est continue, alors elle est surjective.
- d) Si pour tout $c \in [a, b]$, la limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow c$ existe, alors f est continue sur $[a, b]$.
- e) S'il existe une suite (x_n) telle que $x_n \rightarrow 0$ et la limite $f(x_n)$ existe, alors f est continue en 0.
- f) Soit $c \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout suite (x_n) telle que $x_n \rightarrow c$ et $x_n \neq c$, la suite $(f(x_n))$ converge. Alors f est continue en c .

Exercice 33. Vrai ou faux. Si l'énoncé est vrai, le montrer. S'il est faux, donner un contre-exemple.

- a) Si f est continue en a , alors il existe $r > 0$ tel que f est bornée sur $B(a, r)$.
- b) Si f est continue en a , alors il existe $r > 0$ tel que f est uniformément continue sur $B(a, r)$.
- c) Si f est continue sur $[a, b)$ et si la limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow b^-$ existe, alors $\sup_{[a, b]} f$ existe.
- d) Si f est continue sur $[a, b)$ et si la limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow b^-$ existe, alors f atteint son maximum sur $[a, b)$.
- e) Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$, alors il existe $r > 0$ tel que $\frac{1}{f}$ est bien définie sur $B(a, r)$ et continue en a .
- f) Si $f(a) \neq 0$, alors il existe $r > 0$ tel que $\frac{1}{f}$ est bien définie sur $B(a, r)$.
- g) Si $\sup_{[a, b]} f$ existe, si (x_n) est telle que $x_n \rightarrow c \in [a, b]$ et $f(x_n) \rightarrow \sup_{[a, b]} f$ et si f est continue en c , alors $\sup_{[a, b]} f = f(c)$.
- h) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[a, b)$. Alors la limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow b^-$ existe.