

Analyse 1

Série 2

Suites

1. Convergence

Exercice 1. Trouver un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a :

$$\text{a) } \left| \frac{2n}{2n+3} - 1 \right| < \frac{1}{327} \qquad \text{b) } \left| \frac{n^2-2}{3n^2+4} - \frac{1}{3} \right| < \frac{1}{826}$$

Exercice 2. Pour chaque suite suivante, trouver un candidat $L \in \mathbb{R}$ et montrer que cette suite converge vers L en utilisant la définition de limite.

$$\text{a) } a_n = \frac{5n+8}{2n+3} \qquad \text{b) } a_n = \frac{n^2}{n^2+4} \qquad \text{c) } a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}$$

Exercice 3. Déterminer si chacune des suites suivantes est bornée.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a_n = (-1)^n n & \text{b) } a_n = 5^{1+(-1)^n} & \text{c) } a_n = \left(n + \frac{1}{n} \right)^2 \\ \text{d) } a_n = \frac{3n^2+7}{6n^2+5} & \text{e) } a_n = (n+1)^2 - (n^2+2n) & \end{array}$$

Exercice 4. a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ est bornée et divergente.

b) La suite dont le terme général est $b_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n+1})$ converge-t-elle ?

Exercice 5. On définit les suites (a_n) et (b_n) par

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \qquad \text{et} \qquad b_n = a_n + \frac{1}{2n+1}.$$

a) Montrer que (a_n) est croissante et que (b_n) est décroissante.

b) Montrer qu'elles convergent toutes les deux.

Indice. Remarquez que $\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1}$ est positif quelque soit $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit la suite dont le terme général est $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$. Montrer par récurrence que $a_{2k} \geq 1 + \frac{k}{2}$. Dédurre que (a_n) diverge.

Exercice 7. Soit (a_n) une suite. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. (a_n) converge;
2. pour tout $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la suite (a_{n+M}) converge;
3. il existe $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tel que la suite (a_{n+M}) converge.

Montrer que dans ce cas

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+M} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Exercice 8. Soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite. Montrer que si (a_n) est décroissante à partir du rang $M \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et est minorée, alors (a_n) converge et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq M\}.$$

Exercice 9. Soit (a_n) et (b_n) deux suites qui convergent vers L . Montrer que la suite

$$(c_n) = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots)$$

converge aussi vers L .

Exercice 10. Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$. On définit la suite (c_n) par

$$(c_n) = (a_1, -b_1, a_2, -b_2, a_3, -b_3, \dots).$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (a_n) et (b_n) qui permet de conclure que (c_n) converge.

Exercice 11. Soit (s_n) une suite. On pose

$$t_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- a)† Montrer que si $s_n \rightarrow s$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors $t_n \rightarrow s$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- b) Trouver une suite (s_n) qui diverge, mais pour laquelle (t_n) converge.

Exercice 12. Soit (a_n) une suite.

- a) Montrer que si $a_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors (a_n) est minorée. Dédurre que si $a_n \rightarrow -\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, alors (a_n) est majorée.
- b) Si $|a_n| \rightarrow \infty$, a-t-on nécessairement que $a_n \rightarrow \infty$ ou $a_n \rightarrow -\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$?

Exercice 13. Pour chaque suite, déterminer si elle est bornée. Si elle n'est pas bornée, déterminer si elle tend vers ∞ , vers $-\infty$ ou ni l'un ni l'autre.

a) $\left(\frac{2^n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

b) $\left((-1)^n n\right)_{n \in \mathbb{N}}$

c) $\left(\frac{n^2 - \sqrt{n}}{\sqrt{1+n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

Exercice 14. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui tend vers $+\infty$. Montrer qu'il existe un rang $K \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(\frac{1}{a_{n+K-1}})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Attention! Assurez vous qu'il n'y a pas de division par zéro.

Exercice 15. Limites supérieure et inférieure. Soit (a_n) une suite majorée. On définit la suite (b_n) par

$$b_n = \sup_{m \geq n} a_m := \sup\{a_m \mid m \in \mathbb{N}, m \geq n\}. \quad (*)$$

- a) Montrer que (b_n) est décroissante.
- b) Montrer que si $a_n \not\rightarrow -\infty$, alors (b_n) est minorée. Conclure que la suite converge dans ce cas.
- c) Montrer que si $a_n \rightarrow -\infty$, alors $b_n \rightarrow -\infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Définition. Dans les cas de b) et c), la suite (b_n) a une limite; on l'appelle *la limite supérieure* de a_n et on pose

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Si (a_n) n'est pas majorée, alors on pose $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \infty$. Dans tous les cas, la limite supérieure existe ou tend vers $+\infty$ ou tend vers $-\infty$.

- d) Montrer que si (a_n) est bornée, alors on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{n \geq 1} \sup_{m \geq n} a_m \quad (**)$$

où on utilise la notation $\inf_{n \geq 1} c_n := \inf\{c_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$ et celle de (*).

- e) Donner une définition pour la limite inférieure de (a_n) en s'inspirant de a), b) et c). Montrer que cette limite existe ou qu'elle tend vers $+\infty$ ou tend vers $-\infty$ et trouver une formule analogue à (**).

Exercice 16. (Équivalence 1 de l'axiome de complétude). Le but de l'exercice est de montrer que l'axiome de complétude est vrai si et seulement si toute suite croissante et majorée converge.

- a) Montrer que si l'axiome de complétude est vrai, alors toute suite croissante et majorée converge.
- b) On découpe la réciproque en étapes. Soit $a_1 \in E$ et M_1 un majorant de E . Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$, montrer récursivement qu'il existe a_k un élément de E et M_k un majorant de E tels que $a_{k-1} \leq a_k \leq M_k \leq M_{k-1}$ et $M_k - a_k \leq \frac{M_{k-1} - a_{k-1}}{2}$.
Indice. Si a_{k-1} et M_{k-1} ont déjà choisis, considérez $\frac{M_{k-1} + a_{k-1}}{2}$.
- c) Montrer que (a_k) et (M_k) convergent vers une limite commune, disons $L \in \mathbb{R}$.
- d) Montrer que $\sup E = L$.

2. Calcul de limites

Exercice 17. Soit (a_n) une suite telle que $a_n \geq 0$ pour tout n et qui converge vers $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$.

Exercice 18. Soit (a_n) et (b_n) deux suites.

- a) Trouver un exemple de (a_n) et (b_n) bornées telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$ existe, mais (a_n) ou (b_n) divergent.
- b) Si $(a_n b_n)$ converge, alors (a_n) et (b_n) convergent-elles toutes les deux ?
- c) Si $(a_n b_n)$ et $(a_n + b_n)$ convergent, alors (a_n) et (b_n) convergent-elles toutes les deux ?

Exercice 19. Calculer la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes.

a) $\frac{n^3 - 1}{(n - 1)(n^2 + n + 1)}$

b) $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{500}$

c) $\frac{3n^2 + 7\sqrt{n} + 3}{7n^2 + 2}$

d) $\frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+12}}$

e) $\frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n}$

f) $\sqrt[n]{1 + n + n^2}$

g) $\sqrt{n^2 + n} - n$

h) $\frac{2^n}{n!}$

Exercice 20. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $0 < y \leq x$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x^n + y^n} = x$.

Exercice 21. Soit (a_n) , (b_n) et (c_n) des suites. On suppose qu'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que $b_n \rightarrow L$ et $c_n \rightarrow L$ lorsque $n \rightarrow \infty$. De plus, on suppose que pour tout $\eta > 0$, on a $b_n + \eta \leq a_n \leq c_n + \eta$. Montrer que $a_n \rightarrow L$.

Exercice 22. Calculer les limites lorsque $n \rightarrow \infty$ des suites suivantes, si elles existent.

a) $a_n = \sqrt[n]{1 + \sqrt[n]{2^n + n}}$

b) $a_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n]{2^n n}$

c) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-2}}$

Exercice 23. Soit (a_n) et (b_n) les suites de l'exercice 5. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Exercice 24. Calculer la limite de la suite définie par $c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Exercice 25. Soit la suite

$$a_n = \frac{1}{n!} + \frac{2!}{n!} + \frac{3!}{n!} + \cdots + \frac{(n-1)!}{n!} + 1.$$

Calculer la limite de (a_n) , si elle existe.

Exercice 26. Calculer la limite de la suite (a_n) , dont le terme général est donné par

$$\begin{array}{lll} \text{a) } a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n & \text{b) } a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n & \text{c)* } a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \\ \text{d) } a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n} & \text{e) } a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} & \text{f) } a_n = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^{kn} \text{ où } m, k \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Suggestion pour le c). Considérez d'abord $(a_n)^n$.

Exercice 27. Pour quels valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la suite

$$s_n = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \cdots + \frac{x^n}{2^n}$$

converge-t-elle ? Lorsqu'elle converge, déterminer la valeur de la limite.

Exercice 28. Soit E un ensemble non vide et majoré. Soit $S := \sup E$. Montrer qu'il existe une suite (a_n) dans E (c.-à-d. $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$) telle que $a_n \rightarrow S$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

3. Sous-suites, suites de Cauchy et suites récurrentes

Exercice 29. Trouver une sous-suite convergente des suites suivantes, si possible.

$$\text{a) } a_n = (-1)^n n \quad \text{b) } a_n = \left(\frac{1}{n} - 1\right)^n \quad \text{c) } a_n = \left\lfloor \frac{n}{2^n} \right\rfloor$$

Exercice 30. Soit (a_n) une suite dont tous les termes sont positifs ou nuls. On pose $b_n = (-1)^n a_n + (-1)^{n+1}$. Quelle condition sur (a_n) est suffisante pour déterminer que (b_n) possède une sous-suite convergente ?

Exercice 31. Soit (a_n) une suite. Montrer que s'il existe $L \in \mathbb{R}$ tel que pour toute sous-suite (a_{n_k}) , il existe une sous-sous-suite $(a_{n_{k_\ell}})$ qui converge vers L , alors $a_n \rightarrow L$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Exercice 32. Soit $a_1 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $a_{n+1} = \frac{2a_n+3}{6}$.

- a) Montrer que (a_n) converge.
- b) Calculer la limite.

Exercice 33. Soit $s_1 = \sqrt{2}$. On pose

$$s_{n+1} := \sqrt{2 + \sqrt{s_n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que (s_n) converge et que $s_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 34. Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = 2a_n^2$ ($n \in \mathbb{N}$).

- a) Montrer que si a_n converge vers L , alors soit $L = 0$ ou $L = \frac{1}{2}$.
- b) La suite converge-t-elle ?

Exercice 35. À l'aide de la définition, montrer que :

- a) $a_n = \frac{n+2}{n}$ est une suite de Cauchy;
- b) $a_n = (-1)^n$ n'est pas une suite de Cauchy.

Exercice 36. Soit (b_n) une suite telle que $b_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Soit (a_n) une autre suite. Montrer que si pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|a_{n+k} - a_n| \leq |b_n|,$$

alors (a_n) est une suite de Cauchy.

Exercice 37. Soit (a_n) et (b_n) deux suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$|a_{n+1} - a_n| \leq b_n.$$

- a) Soit $s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. On suppose que (s_n) converge. Montrer que (a_n) est une suite de Cauchy.
- b) Si on a plutôt que $b_n \rightarrow 0$, alors (a_n) est-elle une suite de Cauchy ?

Exercice 38. Soit (a_n) une suite. On suppose qu'il existe $\ell \in (0, \infty)$ tel que pour tout $n \geq 2$, on ait

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \ell |a_n - a_{n-1}|.$$

- a) Montrer que $|a_{n+1} - a_n| \leq \ell^{n-1} |a_2 - a_1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$|a_{n+k} - a_n| \leq |a_2 - a_1| \ell^{n-1} \frac{1 - \ell^k}{1 - \ell}.$$

- c) Montrer que si $\ell < 1$, alors (a_n) est une suite de Cauchy.

Exercice 39. Soit (a_n) la suite définie par

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n^3 + a_n^2, & \text{si } n \geq 2; \\ a_1 = -\frac{1}{8}. \end{cases}$$

- a) Montrer que $|a_n| \leq \frac{1}{4}$ pour tout n .
- b) Montrer que $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{11}{16}|a_n - a_{n-1}|$.
- c) Conclure que a_n est une suite de Cauchy. Quelle est la limite ?

Exercice 40. On pose $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- a) Montrer que a_n est un nombre rationnel pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b) Montrer que $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2}|a_n - a_{n-1}|$ pour tout entier $n \geq 2$. Dédurre que (a_n) est Cauchy.
Indice. Montrez d'abord que $1 \leq a_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c) Montrer que la limite de (a_n) n'est pas un nombre rationnel.

Morale : les suites de Cauchy dans $\mathbb{Q}$ ne convergent pas nécessairement dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 41. (Équivalence 2 de l'axiome de complétude). Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

1. l'axiome de complétude est vrai;
2. toute suite croissante et majorée converge;
3. toute suite bornée possède une sous-suite convergente;
4. toute suite de Cauchy converge.

Suggestion. Pour $4 \Rightarrow 1$, reprendre la démarche à l'exercice 16 et montrer que (a_k) et (M_k) sont des suites de Cauchy.

4. Autre

Exercice 42. Vrai ou faux. Si l'énoncé est vrai, le montrer. S'il est faux, donner un contre-exemple.

- a) Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ et (a_n) une suite dans E . Si E est fermé et $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$, alors $L \in E$.
- b) Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ et (a_n) une suite dans E . Si E est ouvert et $a_n \rightarrow L$, alors $L \in E$.
- c) Soit (a_n) une suite. Si (a_n) possède une sous-suite convergente, alors (a_n) est une suite de Cauchy.
- d) Soit (a_n) une suite. Si (a_n) est une suite de Cauchy, alors toute sous-suite de (a_n) est une suite de Cauchy.
- e) Soit (a_n) et (b_n) deux suites. Si $(a_n + b_n)$ converge, alors (a_n) ou (b_n) converge.

- f) Soit (a_n) une suite. Si (a_n) est convergente, alors $((-1)^n a_n)$ converge.
- g) Soit (a_n) une suite. Si $a_n \rightarrow \infty$, alors toute sous-suite de (a_n) tend vers ∞ .
- h) Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. Si E n'est pas majoré, alors il existe une suite (a_n) dans E telle que $a_n \rightarrow \infty$.

Exercice 43. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble. Montrer que $x \in \mathbb{R}$ est un point limite de E si et seulement s'il existe une suite (a_n) dans $E \setminus \{x\}$ telle que $a_n \rightarrow x$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Remarque. Ceci justifie l'appellation « point limite ».

Exercice 44. Soit (a_n) une suite. On appelle $x \in \mathbb{R}$ un *point d'accumulation* de (a_n) s'il existe une sous-suite (a_{n_k}) telle que $a_{n_k} \rightarrow x$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Montrer que (a_n) possède un unique point d'accumulation si et seulement si elle converge.

Exercice 45. Propriétés des limites inférieures et supérieures. Soit (a_n) une suite. Montrer les propriétés suivantes de $\limsup$ et $\liminf$. (Voir l'exercice 15 au besoin.)

- a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ b) $\limsup_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$
- c) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ d) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$
- e) Les énoncés suivants sont équivalents :
- i) $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$;
 - ii) il existe une sous-suite (a_{n_k}) telle que $a_{n_k} \rightarrow \infty$ lorsque $k \rightarrow \infty$;
 - iii) (a_n) n'est pas majorée.
- Déduire l'analogie pour la limite inférieure.
- f) Soit (a_{n_k}) une sous-suite de (a_n) qui converge vers L . Montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq L \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

g)[†] Montrer qu'il existe une sous-suite (a_{n_k}) telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Déduire le résultat analogue pour la limite inférieure.

Suggestion. Vous pouvez construire une sous-suite à l'aide du principe du bon ordre et de la suite (b_n) de l'exercice 15.

h) Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ si et seulement si $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Suggestion. Pour la réciproque, les cas où la limite inférieure et la limite supérieure sont $\pm\infty$ sont déjà faits au c) et au d). Pour le cas où elles sont finies, utilisez l'exercice 31.

Exercice 46[†]. Représentation décimale. Soit $x \in [0, \infty)$. Le but de l'exercice est d'associer une représentation décimale à x . Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on pose

$$s_n := \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}, \quad a_{n+1} := 10^{n+1}(s_{n+1} - s_n)$$

et $a_0 = s_0$.

a) Montrer que $a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ pour $n \geq 1$.

b) Montrer que s_n s'écrit sous la forme

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k}.$$

Indice. Utilisez le principe de récurrence.

c) Montrer que (s_n) est croissante et majorée par x . Déduire que (s_n) est convergente.

d) On définit une troisième suite : on pose

$$t_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}.$$

Montrer que (t_n) est décroissante et minorée par x .

e) Montrer que $t_n - s_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

f) Déduire que $s_n \rightarrow x$ et donc que

$$x = \sup \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Remarque. On sait que certains nombres ont plus d'une représentations décimales possibles. Cette façon de procéder en donne une, celle qui ne devient pas tôt ou tard une suite constante de 9. Par exemple, cette façon de procéder donne la représentation décimale 1 au nombre un et non 0,999999...