

Analyse 1

Série 1

Nombres réels

Notation. Pour le cours, l'ensemble des naturels $\mathbb{N}$ ne contient pas 0. Ainsi, on écrit

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}.$$

On écrira $\mathbb{N} \cup \{0\}$ si l'on inclut 0.

1. Nombres rationnels et nombres réels

Exercice 1. Soit x, y deux nombres irrationnels.

- a) Montrer que $x + y$ peut être rationnel ou bien irrationnel.
- b) Montrer que xy peut être rationnel ou bien irrationnel.

Exercice 2. Montrer qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont le carré est 12.

Exercice 3. Soit $Q(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ un polynôme tel que $a_n \neq 0$ et a_j est un entier pour tout j . Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un zéro de Q , c'est-à-dire que $Q(x_0) = 0$. Montrer que si $x_0 = \frac{p}{q}$, où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$, alors on a que $p|a_0$ et $q|a_n$.

Exercice 4. Montrer que $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ est irrationnel.

Indice. Trouvez un polynôme p dont les coefficients sont entiers et qui a $\sqrt{2 + \sqrt{5}}$ comme zéro. Appliquez ensuite l'exercice précédent.

Exercice 5. Principe du bon ordre. Les nombres naturels possèdent la propriété suivante : tout ensemble $S \subseteq \mathbb{N}$ non vide contient un plus petit élément, autrement dit $\min S$ existe. Montrer le principe de récurrence à partir du principe du bon ordre : si $S \subseteq \mathbb{N}$ est tel que

- i) $1 \in S$;
 - ii) si $k \in S$, alors $k + 1 \in S$;
- alors $S = \mathbb{N}$.

Suggestion. Démontrez que $B := \mathbb{N} \setminus S$ est vide.

Exercice 6. Montrer la formule suivante par récurrence :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et k un entier tel que $0 \leq k \leq n$. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, que l'on lit « k parmi n », est défini par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

a) Montrer la *règle de Pascal* : si $1 \leq k \leq n$, alors

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

b) Montrer que $\binom{n}{k}$ est nécessairement un entier.

Exercice 8. Théorème du binôme. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer la formule du binôme :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

2. Inégalités

Exercice 9. Montrer les propriétés suivantes de la valeur absolue.

- a) $|x| \geq 0$
- b) $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$
- c) $|x| = |-x| = \max\{x, -x\}$
- d) $|xy| = |x||y|$
- e) $-|x| \leq x \leq |x|$

Exercice 10. Trouver tous les nombres $x \in \mathbb{R}$ qui vérifient les inégalités suivantes.

- a) $x^2 + x + 1 > 3$
- b) $\frac{x-1}{x+1} > 0$
- c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$
- d) $\frac{2x+1}{x-1} \geq 3$

Exercice 11. Si $0 < a < b$, montrer que $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$.

Exercice 12. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, les inégalités suivantes sont vérifiées.

- a) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$
- b) $3x^2 + 5xy + 3y^2 \geq 0$

Exercice 13. Soit $a, b, c > 0$. Montrer que les inégalités suivantes sont vraies.

- a) $a^2 + b^2 > ab$
- b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Exercice 14. Trouver les nombres réels qui vérifient les inégalités suivantes.

a) $|x - 1| + |x + 1| < 1$

b) $|x - 1| \cdot |x + 2| \leq 3$

Exercice 15. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |y - x|}{2} \quad \text{et} \quad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |y - x|}{2}.$$

Exercice 16. Montrer que si $x \geq \frac{199}{200}$, alors on a $x^{100} \geq \frac{1}{2}$.

3. Supremum et infimum

Exercice 17. a) Quelle est la différence entre le maximum d'un ensemble et son suprémum ?

b) Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. On suppose que le maximum de A existe. Alors montrer que $\sup A$ existe et $\max A = \sup A$.

c) Trouver un exemple d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ tel que $\sup A$ existe, mais $\max A$ n'existe pas.

Exercice 18. Soit A et B des ensembles tels que $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$ existent. Montrer que si $A \subseteq B$, alors $\sup A \leq \sup B$ et $\inf A \geq \inf B$.

Exercice 19. Déterminer au moins un majorant et un minorant pour chacun des ensembles suivants si possible, sinon montrer que l'ensemble ne possède pas de majorant ou de minorant.

a) $\{p \mid p \text{ est premier}\}$

b) $\{x^2 - x \mid x \in \mathbb{R}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 1\}$

d) $\left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N}, 0 < p < 10, 1 \leq q < 100 \right\}$

e) $\left\{ \frac{1}{y} \mid y \in (0, 1) \right\}$

Exercice 20. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $-\infty < a \leq b < \infty$. Montrer que

a) $\sup[a, b] = b$

b) $\inf[a, b] = a$

c) $\sup(a, b) = b$

d) $\inf(a, b) = a$

Exercice 21. Trouver le supremum et l'infimum des ensembles suivants s'ils existent. Le cas échéant, vérifier si ce supremum et cet infimum appartiennent à l'ensemble.

- a) $\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \neq 0 \right\}$ b) $\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$
- c) $\{x : x^2 + x - 1 < 0\}$ d) $\left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$
- e) $\{(-1)^n n \mid n \in \mathbb{N}\}$ f) $\left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$
- g) $\{x^2 + x - 1 : x < 0\}$

Exercice 22. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit respectivement le supremum de f sur $E \subseteq D$ et l'infimum de f sur E par

$$\sup_{x \in E} (f(x)) := \sup\{f(x) \mid x \in E\} \quad \text{et} \quad \inf_{x \in E} (f(x)) := \inf\{f(x) \mid x \in E\}.$$

De plus, on dit que le supremum (resp. l'infimum) est atteint en $x_0 \in E$ si on a respectivement

$$\sup_{x \in E} (f(x)) = f(x_0) \quad \text{ou} \quad \inf_{x \in E} (f(x)) = f(x_0).$$

Montrer que $M := \sup_{x \in E} f(x)$ est le supremum de f sur E si et seulement si

- i) pour tout $x \in E$, $f(x) \leq M$ (M est un majorant de f sur E), et
- ii) si M' est un autre majorant, alors $M \leq M'$ (M est le plus petit majorant de f sur E).

Exercice 23. Calculer les quantités suivantes si elles existent. Dire si le supremum ou l'infimum est atteint.

- a) $\sup_{x \in [0,1]} x^2$ b) $\inf_{x \in (1,2)} (x+1)$

Suggestion. Pour le a), vous pouvez faire et utiliser l'exercice 37.

Exercice 24. a) Montrer que $\inf_{x \in E} f(x) \leq \sup_{x \in E} f(x)$.

b) Montrer qu'il y a égalité si et seulement si f est constante sur E .

Exercice 25. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $E \subseteq D$ un sous-ensemble non vide. Montrer que $-\sup_{x \in E} f(x) = \inf_{x \in E} (-f(x))$ et que $\sup_{x \in E} (-f(x)) = -\inf_{x \in E} f(x)$.

Exercice 26. Trouver un exemple de fonction f et d'ensemble E tels que le supremum de f sur E est atteint en plus d'un point.

Exercice 27. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ et $E \subseteq D$.

- a) Montrer que $\sup_{x \in E} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in E} (f(x)) + \sup_{x \in E} (g(x))$.
- b) Montrer que $\inf_{x \in E} (f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in E} (f(x)) + \inf_{x \in E} (g(x))$.

4. Axiome de complétude

Exercice 28. Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$. On définit l'ensemble $A+B$ par $A+B := \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$.

- a) Montrer que A et B sont majorés si et seulement si $A+B$ est majoré. Montrer que, dans ce cas, $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
- b) Faire l'analogue du a) pour l'infimum.
- c) On suppose que A et B sont bornés. Si on définit $A-B := \{a-b \mid a \in A, b \in B\}$, a-t-on $\sup(A-B) = \sup A - \sup B$?

Exercice 29. En utilisant l'axiome de complétude, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$.

Exercice 30. Généralisation du principe du bon ordre (voir exercice 5). Montrer que si $E \subseteq \mathbb{Z}$ est non vide et minoré, alors E atteint son minimum.

Exercice 31. En utilisant le principe du bon (généralisé), montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. (Comparer avec l'exercice 29.)

Exercice 32. En classe, la propriété d'Archimède a été utilisée pour démontrer la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (voir la section 1.4). Montrer la réciproque, c'est-à-dire que si la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est vraie, alors $\mathbb{R}$ possède la propriété d'Archimède.

Exercice 33. Utiliser la propriété d'Archimède pour démontrer que $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Exercice 34. Calculer les nombres suivants.

- a) $[3,2]$
- b) $\lfloor -\frac{1}{10} \rfloor$
- c) $\left\lfloor \left(\frac{3}{7}\right)^2 \right\rfloor$

Exercice 35. A-t-on $\lfloor x^2 \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?

Exercice 36. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{Z}$.

- a) Montrer que si $x < y$, alors $\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$. Montrer qu'il est possible d'avoir égalité.
- b) Montrer que $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor$.
- c) Montrer que $\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Exercice 37. Soit $n \geq 2$ un entier fixé. Montrer que

$$\{x^n \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1] \quad \text{et} \quad \{\sqrt[n]{x} \mid 0 \leq x \leq 1\} = [0, 1].$$

Exercice 38. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ deux nombres positifs et soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.

Exercice 39. Soit $x > 0$.

a) Soit $q \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(x^q)^n = x^{nq}$.

b) Montrer que si $a, m \in \mathbb{Z}$ et $b, n \in \mathbb{N}$ sont tels que $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, alors $x^{\frac{a}{b}} = x^{\frac{m}{n}}$.

c) Montrer que

$$x^{\frac{a}{b}} = (\sqrt[b]{x})^a.$$

Exercice 40. Soit $A, B \subseteq \mathbb{R}$ des sous-ensembles tels que

1. $\mathbb{R} = A \cup B$;
2. $A \cap B = \emptyset$;
3. A et B sont non vides;
4. si $a \in A$ et $b \in B$, alors $a < b$.

Montrer qu'il existe un unique nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in A$ et pour tout $b \in B$, on a $a \leq x \leq b$.

Exercice 41. Montrer que l'exercice précédent est faux si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$.

5. Dénombrabilité

Exercice 42. Soit A, B des ensembles finis et $f: A \rightarrow B$. On note par $|A|$ la cardinalité de A , c'est-à-dire le nombre d'éléments dans A . Montrer que

- a) si f est surjective, alors $|A| \geq |B|$;
- b) si f est injective, alors $|A| \leq |B|$;
- c) si f est bijective, alors $|A| = |B|$.

Exercice 43. Montrer que $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par

$$\varphi(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ \frac{1-n}{2}, & \text{si } n \text{ est impair;} \end{cases}$$

est bijective.

Exercice 44. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, où $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n, m) \mid n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 45[†]. On dit qu'un ensemble A est *au plus dénombrable* si A est de cardinalité finie ou A est dénombrable. Si A est au plus dénombrable et si $B \subseteq A$, alors montrer que B est au plus dénombrable.

Exercice 46. Soit A un ensemble qui n'est pas au plus dénombrable et soit B un ensemble. Montrer que

- a) s'il existe $f: A \rightarrow B$ injective, alors B n'est pas au plus dénombrable;
- b) s'il existe $g: B \rightarrow A$ surjective, alors B n'est pas au plus dénombrable.

Exercice 47. Montrer qu'une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable. Plus précisément, soit I un ensemble dénombrable et pour chaque $i \in I$, soit A_i un ensemble dénombrable. Montrer que

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i := \{x \mid \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

est dénombrable.

Indice. Montrez que vous pouvez remplacer I par $\mathbb{N}$ sans perdre de généralité. Ensuite, adaptez l'argument utiliser en classe pour les rationnels.

Exercice 48[†]. Soit $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des sous-ensembles de $\mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas au plus dénombrable.

- a) Montrer que $(0, 1)$ n'est pas au plus dénombrable.
- b) Soit $a, b, m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $2^a 3^b = 2^m 3^n$, alors $a = m$ et $b = n$.
- c) Soit $x \in (0, 1)$. Montrer que l'infimum de $\{q \in \mathbb{Q} \mid q > x\}$ existe et qu'il vaut x .
- d) Montrer que $f: (0, 1) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ définie par

$$f(x) = \left\{ 2^a 3^b \mid a, b \in \mathbb{N}, \text{pgcd}(a, b) = 1, \frac{a}{b} > x \right\}$$

est injective. Conclure que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas au plus dénombrable.

6. Topologie de $\mathbb{R}$

Exercice 49. Calculer les points limites des ensembles suivants.

- a) $E := [0, 1)$
- b) $E := \mathbb{Z}$
- c) $E = \mathbb{Q}$
- d) $E = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$

Exercice 50. Déterminer quels ensembles parmi les suivants sont ouverts dans $\mathbb{R}$.

- a) $E = \mathbb{R}$
- b) $E = (0, 2) \setminus \{1\}$
- c) $E = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$
- d) $E = \{1\}$

Exercice 51. Quels ensembles de l'exercice précédent sont fermés dans $\mathbb{R}$?

Exercice 52. Montrer les propriétés suivantes des ouverts.

- a) Si A_i est ouvert pour tout $i \in I$, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est ouvert.
- b) Si $A_1, \dots, A_n$ sont ouverts, alors $A_1 \cap \dots \cap A_n$ est ouvert.
- c) $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont ouverts.

Exercice 53. Montrer les propriétés suivantes des fermés.

- a) Si A_i est fermé pour tout $i \in I$, alors $\bigcap_{i \in I} A_i$ est fermé.
- b) Si $A_1, \dots, A_n$ sont fermés, alors $A_1 \cup \dots \cup A_n$ est fermé.
- c) $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont fermés.

Exercice 54. Montrer que si $E \subseteq \mathbb{R}$ est fermé et si $x \in \mathbb{R}$ est un point limite de E , alors $x \in E$.