

Exercices du 3 août

Analyse 1

Exercice 1. Soit $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(x) \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow a^+$ et $f(x) \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow b^-$. Montrer que f atteint son minimum sur (a, b) .

Exercice 2. Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose que f est convexe. Montrer que $f(x + h) \geq f(x) + f'(x)h$ pour tout h tel que $x + h \in I$.

Rappel. Une fonction est convexe si $f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y)$ pour tout $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0, 1]$.

Exercice 3. Soit $f: (a, b)$ une fonction dérivable. On suppose que $f(x) \rightarrow \infty$ lorsque $x \rightarrow b^-$. Montrer qu'il existe une suite (c_n) dans (a, b) telle que $f'(c_n) \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$.