

Chapitre 5

Calcul différentiel

5.1. Définition de la dérivée

Définition 5.1.1. Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. On dit que f est *dérivable en* $a \in I$ si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe.

2. Si f est dérivable en a , on note la valeur de la limite par $f'(a)$ et on l'appelle la *dérivée de f en a* .
3. On dit que f est dérivable (sur I) si pour tout $a \in I$, f est dérivable en a .

Notation. On note la dérivée de f en a par $f'(a)$ ou $\frac{df}{dx}(a)$ ou $\frac{dy}{dx}(a)$.

Dérivée d'ordre supérieur. Si f est dérivable sur I , alors cela définit une fonction $f': I \rightarrow \mathbb{R}$. Il se peut que f' soit dérivable en un point $a \in I$. Dans ce cas, on écrit $f''(a) := (f')'(a)$ et on l'appelle la *dérivée seconde* de f en a ou la dérivée d'ordre 2. Inductivement, on écrit $f^{(n)}(a) := \left(f^{(n-1)}\right)'(a)$.

5.2. Règles de calcul

Soit I un intervalle et $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables en a .

1. Sommes. $(f + g)$ est dérivable en a et $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.
2. Produits. fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.
3. Quotients. Si $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.
4. Fonctions composées. Règle de dérivation en chaîne : si f est dérivable en a et g dérivable en $b := f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) = g'(b)f'(a)$.

5.3. Extremums

Définition 5.3.1. Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et soit $a \in I$. On dit que a est un *maximum* (resp. *minimum*) *local* s'il existe $(c, d) \subseteq I$ tel que $a \in (c, d)$ et $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$) pour tout $x \in (c, d)$.

Si a est au bord de l'intervalle I , alors (c, d) sera plutôt de la forme $[a, d)$ ou $(c, a]$.

Théorème 5.3.2. Supposons que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ atteint un minimum ou un maximum en un point $a \in I$. Supposons de plus que a est un point intérieur de I . Si f est dérivable en a , alors $f'(a) = 0$.

Définition 5.3.3. On appelle les points $x \in I$ où $f'(x) = 0$ les *points critiques* de f . (Dans certains contextes, les points critiques comprennent les points où f n'est pas dérivable.)

5.4. Théorème de Rolle

Théorème de Rolle. 5.4.1. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

- f est continue sur $[a, b]$;
- f est dérivable sur (a, b) ;
- $f(a) = f(b) = 0$.

Alors il existe $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = 0$.

Corollaire 5.4.2. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et n fois dérivable sur (a, b) . Supposons que $f^{(n)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in (a, b)$. Alors l'équation $f(x) = 0$ possède au plus n solutions dans $[a, b]$.

5.5. Théorème des accroissements finis

Théorème (des accroissements finis) 5.5.1. (TAC) Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b) . Alors il existe $c \in (a, b)$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Corollaire 5.5.2. Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I .

Théorème 5.5.3. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle I ouvert.

- (i) f est croissantes $\iff f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- (ii) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement croissante sur I .

On a les résultats analogues pour f décroissantes.

5.6. Règles de l'Hôpital

Théorème 5.6.1. Soit $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions dérivables. Soit $a \in I$ et supposons que $f(a) = 0$ et $g(a) = 0$. Si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Lemme 5.6.2. Soit $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ et dérivables sur (a, b) . Il existe $c \in (a, b)$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Théorème 5.6.3. Soit $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = \infty.$$

Si $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, alors $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

De plus, l'énoncé est vrai si on remplace b par $+\infty$.

5.7. Développements limités

Théorème (des développements limités) 5.7.1. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ et soit a dans l'intérieur de I . Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \varepsilon(h) h^n,$$

où $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$.

Théorème 5.7.2. 1. Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$, alors f a un minimum local en a .

2. Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$, alors f a un maximum local en a .

Théorème 5.7.3. (Méthode de Newton) Soit a dans l'intérieur de I . Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Supposons que $f(a) = 0$ et $f'(a) \neq 0$. On pose

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Alors il existe $\delta > 0$ et $M > 0$ tels que si $x_0 \in [a - \delta, a + \delta]$, alors $x_n \rightarrow a$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et $|x_{n+1} - a| \leq M|x_n - a|^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5.8. Théorème de Taylor

Théorème (de Taylor) 5.8.1. Soit I un intervalle. Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ -dérivable et soit $a \in I$ et $a+h \in I$. Alors, il existe $\theta \in (0, 1)$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}.$$

Remarque. Le cas $n=0$ est le théorème des accroissements finis.

Corollaire 5.8.2. Sous les mêmes hypothèses que le théorème, on a

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + R_{n+1}(h),$$

$$\text{où } |R_{n+1}(h)| \leq \max_{x \in [a, a+h]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} |h|^{n+1}.$$

Tracer de graphe.

Stratégie générale pour tracer le graphe d'une fonction.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Examiner s'il y a de la symétrie.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ afin d'identifier les intervalles où f est croissante ou décroissante.
4. Déterminer le signe de f'' afin d'identifier les intervalles où f est convexe (f' croissante) ou concave (f' décroissante).
5. Étudier les comportements limites de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$ et des points où f n'est pas définie.
6. Évaluer f en quelques points clés (p.ex. là où le graphe traverse les axes et où $f'(x) = 0$).